CURVAS TECNICAS (III)

Curvas cónicas: La parábola

TEMA 10

1. La parábola: Definición, elementos y propiedades más importantes (Fig. 1)

La parábola es una curva plana, abierta y de una rama. Se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo ***F***, llamado **foco**, y de una recta fija ***d***, llamada **directriz**. Tiene un vértice ***V*** y un eje de simetría que pasa por *V* y por el foco y es perpendicular a la directriz. La tangente en el vértice a la curva es paralela a la directriz.

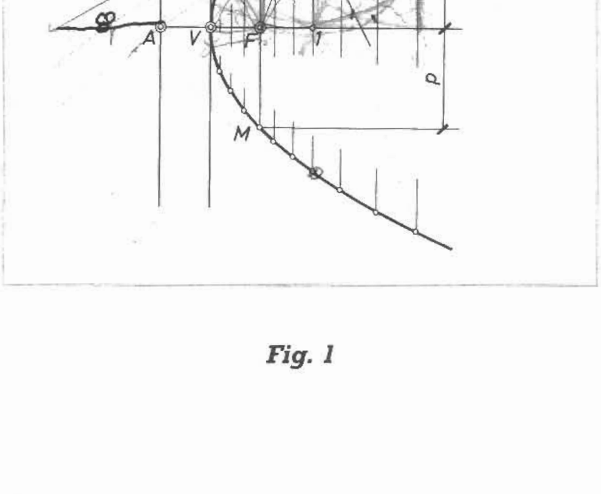


Fig. 1

El vértice, como otro punto cualquiera, equidista de la directriz y del foco, es decir, $\overline{VA} = \overline{VF} = p/2$. Los radios vectores del punto *P* son $\overline{PN}$ y $\overline{PF}$.

Se llama parámetro *2p* de la parábola, al igual que en la elipse y en la hipérbola, a la longitud de la cuerda que es perpendicular al eje en el foco.

La directriz ***d*** de la curva hace de **circunferencia focal** de la parábola, en este caso de radio infinito. Según esto, la directriz es el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco respecto de cada tangente.

La tangente en el vértice, que es una recta, hace de **circunferencia principal** y se define como en las curvas anteriores.

El foco equidista del punto de tangencia de una tangente y del punto donde ésta corta al eje de la curva.

2. Construcción de la parábola por puntos (Fig. 1)

Se conocen la directriz *d*, el eje y el foco. El vértice *V* es el punto medio del segmento $\overline{AF}$. Se traza por un punto *1* del eje, la perpendicular a éste y con centro en *F* y radio $\overline{A\text{-}1} = r$, se corta a dicha perpendicular, obteniendo el punto *P* y su simétrico, que son puntos de la curva; se tiene así $r = \overline{PF} = \overline{PN}$, según la definición de la curva; esta operación se repite para obtener nuevos puntos que se unen con plantilla de curvas.

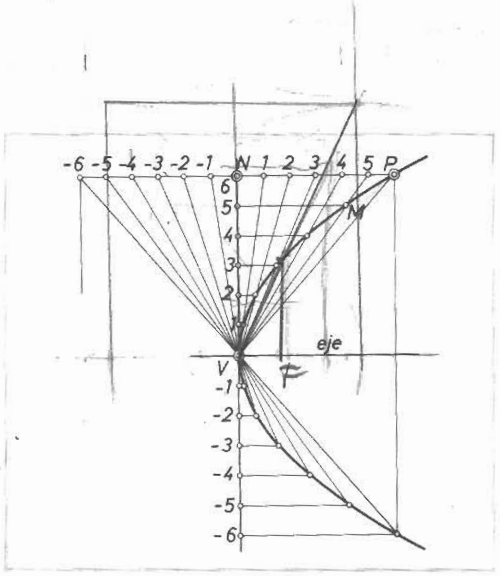


Fig. 2

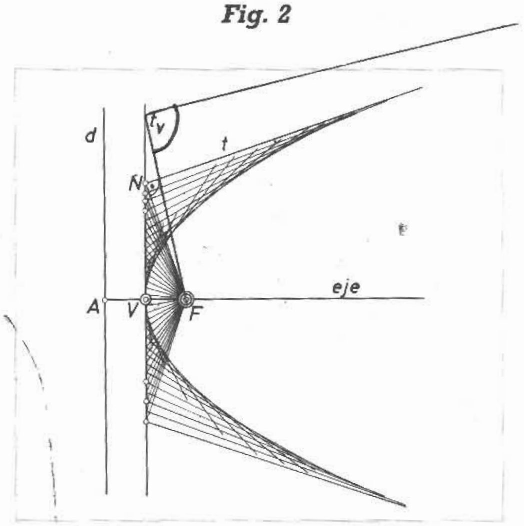


Fig. 3

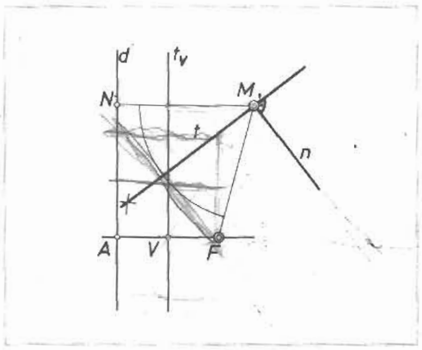


Fig. 4

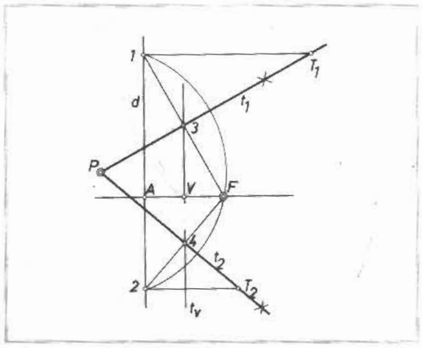
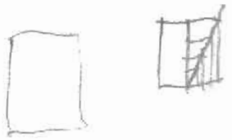


Fig. 5

3. Construcción de la parábola dados el eje, el vértice y un punto de la curva (Fig. 2)

Se traza la tangente en el vértice, $\overline{VN}$, y la paralela $\overline{PN}$ al eje; se divide $\overline{PN}$ y $\overline{VN}$ en un número de partes iguales; el rayo $\overline{V\text{-}5}$ y la paralela por *5* al eje se cortan en el punto *M* de la curva; de la misma forma se han obtenido otros puntos de la curva.



4. Construcción de la parábola por envolventes (Fig. 3)

Sabiendo que la tangente t_v en el vértice es la circunferencia principal de la curva, basta, como en la elipse, tomar puntos de ella, tal como el *N*, unirle con el foco *F* y por *N* trazar la perpendicular a $\overline{FN}$; esta recta *t* es tangente a la curva. Repitiendo esta operación se obtienen rectas tangentes que envuelven a la curva y que a la vez la van construyendo.

5.

5. Trazado de la tangente y de la normal en un punto *M* de la parábola (Fig. 4)

La tangente ***t*** en un punto *M* de la parábola es la bisectriz de los radios vectores $\overline{MN}$ y $\overline{MF}$; la normal ***n*** es perpendicular a la tangente.

5

6. Tangentes a la parábola desde un punto exterior (Fig. 5)

Sea el punto *P*; se traza la circunferencia de radio $\overline{PF}$ y centro en *P*, la cual corta a la directriz, que en la parábola hace de circunferencia focal de radio infinito, en los puntos *1* y *2*. Las mediatrices de los segmentos $\overline{1\text{-}F}$ y $\overline{2\text{-}F}$ son las tangentes t_1 y t_2. Los puntos de tangencia T_1 y T_2 se obtienen trazando por *1* y *2* los radios vectores que son paralelos al eje. Las tangentes halladas cortan a la tangente en el vértice t_v en los puntos *3* y *4* que son los pies de las perpendiculares trazadas por el foco a las tangentes.

7. Tangente a la parábola paralela a una dirección dada (Fig. 6)

La tangente ha de ser paralela a la dirección D; por el foco se traza la perpendicular a D, la cual corta en M a la directriz d y en I a la tangente en el vértice t_v. La tangente pasa por el punto I y su punto de tangencia es T, en la paralela por M al eje de la curva.

Obsérvese que la perpendicular por F a la dirección D es una circunferencia de radio infinito, precisamente la circunferencia de radio $\overline{PF}$ de la *figura 5*, pero que en este caso el punto P es impropio.

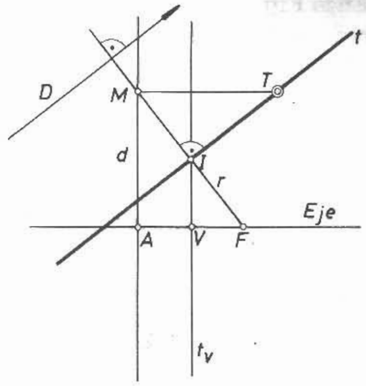


Fig. 6

8. Puntos de intersección de una recta con una parábola (Fig. 7)

El procedimiento es el mismo que para las otras cónicas ya estudiadas. Con centro en un punto O de la recta r, se traza la circunferencia que pase por F y que pasará también por el simétrico F_1 de F respecto a r; desde el punto C_r, centro radical, se traza la tangente C_r-T y este segmento se lleva sobre la directriz, obteniendo los puntos A y B; las paralelas al eje por A y B dan los puntos de intersección I e I' de la recta r con la parábola.

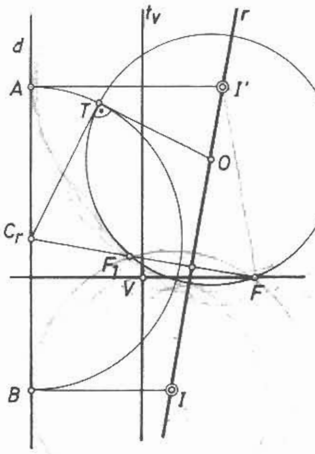


Fig. 7

9. Determinación de los elementos de la parábola, conocidas dos tangentes y sus puntos de contacto (Figs. 8 y 9)

En la *Fig. 8* se indica la forma de obtener un punto cualquiera T'' de la parábola, así como su tangente t''. Los datos son las tangentes t_1 y t_2 y sus puntos de contacto T_1 y T_2. Se unen los puntos T_1 y T_2 y el punto medio M de este segmento se une con N; la recta MN es la dirección del eje. Se toma un punto cualquiera P de la recta T_1T_2 y por él se trazan las paralelas a las tangentes, que cortan a éstas en los puntos *1* y *2*; la recta *1-2* es la tangente t'' en el punto T'' que se obtiene al trazar por P la paralela a la dirección del eje.

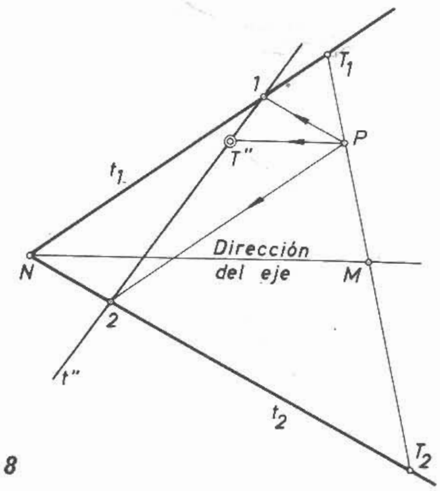


Fig. 8

En la **Fig. 9** se hace aplicación de la construcción anterior para construir la parábola por puntos a partir de los mismos datos.

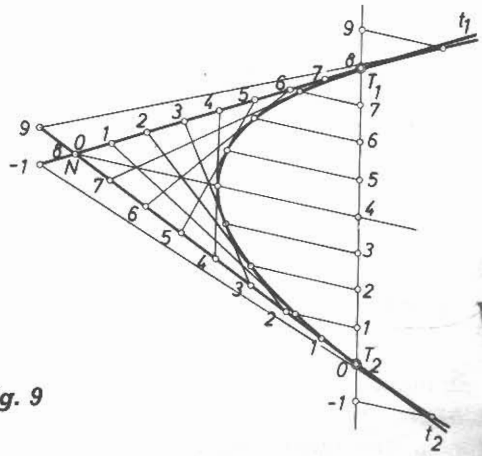


Fig. 9

En la **Fig. 10** se conocen las tangentes t_1 y t_2 y los puntos de tangencia T_1 y T_2. Las tangentes se cortan en N y este punto, unido con el M, medio de $\overline{T_1\text{-}T_2}$, nos da la dirección del eje. Se traza una perpendicular cualquiera CC' a la dirección del eje y por C y C' las paralelas a las tangentes dadas, que se cortan en B; unimos B con N y obtenemos B' en la cuerda $\overline{T_1\text{-}T_2}$; por B' pasa el eje de la curva, del cual conocemos ya su dirección. Para hallar el vértice, por B' trazamos paralelas a las tangentes; uniendo los puntos R_1 y R_2 tenemos el vértice V y su tangente. El foco se obtiene trazando por R_1 o R_2 la perpendicular a la tangente respectiva.

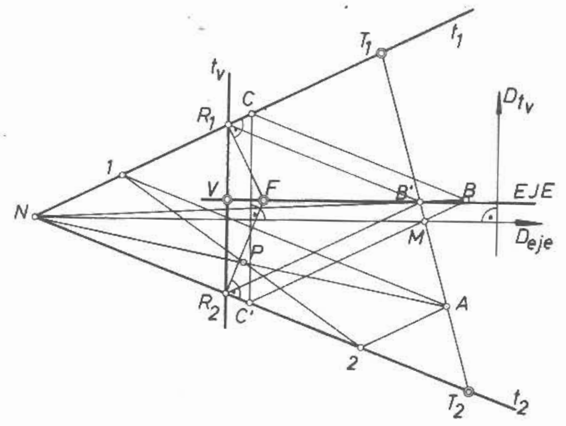


Fig. 10

Si

10. Centro de curvatura en el vértice de una parábola (Fig. 11)

El centro de curvatura en el vértice de una parábola es el punto C_v del eje, siendo $\overline{C_vF} = \overline{VF}$. $= VA$

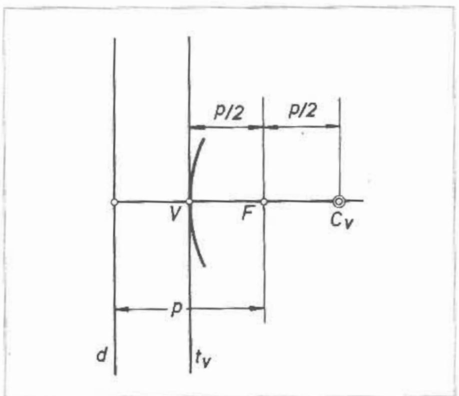


Fig. 11

No

11. Radios de curvatura y construcción de la parábola por arcos de circunferencia (Fig. 12)

En primer lugar hay que determinar varios puntos de la curva para unirlos después con arcos de circunferencia. El punto P_1 es de la curva; se traza la normal P_1-1, que es la bisectriz de los radios vectores r y r_1 del punto P_1; esta normal corta en 1 al eje y por este punto se traza la perpendicular a la normal, que se corta en A_1 al radio vector r_1; por A_1 se vuelve a trazar otra perpendicular, en este caso al eje, la cual corta a la normal en el punto C_1, centro de curvatura de la parábola en el punto P_1. El radio de curvatura es $\overline{C_1\text{-}P_1}$. Se toma otro punto P_2 y se hacen las mismas operaciones. El punto T de tangencia de los dos arcos estará en la recta C_1-C_2.

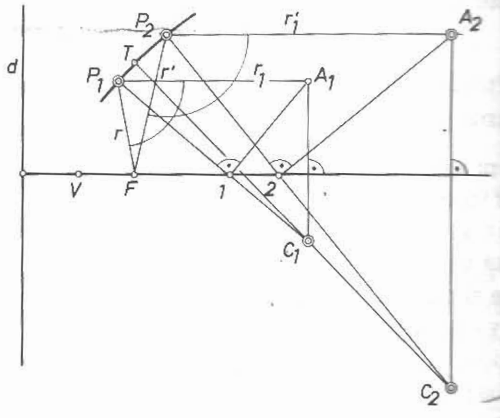


Fig. 12

No

12. Problema (Fig. 13)

Dada una tangente t, un punto P y el foco F de una parábola, determinar: 1.° La directriz y el eje. 2.° El punto de tangencia de la tangente. 3.° Los puntos de intersección de la parábola con una recta que pasa por F y es perpendicular al eje. 4.° Los centros de curvatura en el vértice, en el punto P y en los puntos de intersección hallados. Construcción de la curva por arcos de circunferencia. El punto P dista *10 mm.* de la tangente, y el foco F, *30 mm.* de la tangente y *20 mm.* del punto P.

Hágase aplicación de las propiedades dadas en el estudio de la parábola.

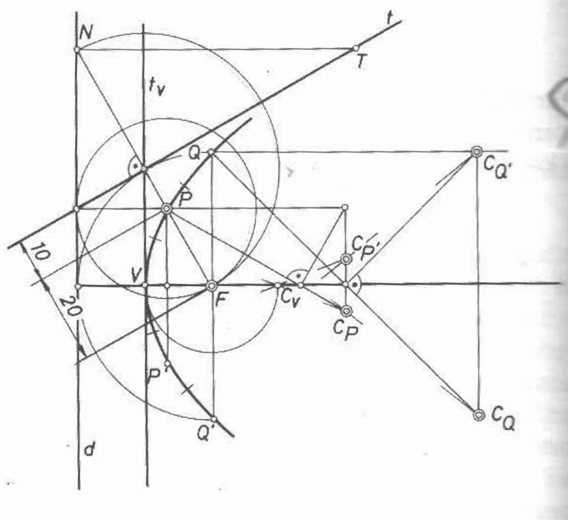


Fig. 13

S