RELACIONES GEOMÉTRICAS

Proporcionalidad, semejanza, igualdad, equivalencia y simetría

TEMA 13

1. Relaciones geométricas

Entre dos figuras planas pueden existir una serie de relaciones geométricas que ligan de alguna manera a ambas figuras, bien atendiendo a su forma, a su tamaño o a su disposición. Estas relaciones pueden ser **gráficas** o **métricas**. Entre estas relaciones están la igualdad, la equivalencia, la semejanza, la simetría, la homotecia, la afinidad, la homología, etc. En general se dice "esta figura es igual a esta otra", "esta figura es semejante a esta otra", etc.

En este tema se estudian las condiciones que deben cumplir dos figuras iguales, dos figuras semejantes, dos figuras equivalentes o dos figuras simétricas y a la vez, la forma de construir una figura que sea igual, o equivalente, o semejante, o simétrica respecto de otra dada.

2. Proporcionalidad

Se denomina "**razón**" el resultado de la comparación de dos cantidades. Las dos cantidades comparadas se llaman "**términos**" de la razón.

Se llama "**proporción**" a la igualdad de dos razones:

$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ siendo **a, b, c** y **d** los términos de la proporción.

a y **d** son los términos **extremos**; **b** y **c** son los términos **medios**.

3. Cuarto proporcional (Fig. 1)

El segmento –**x**– que es cuarto proporcional a tres segmentos **a, b** y **c**, conocidos, se expresa así:

$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{x}}$ siendo **x** el cuarto proporcional.

El valor de **x** se obtiene aplicando el teorema de Thales.

Sobre una recta *r* se toma el segmento **a** y a continuación el segmento **b**. A partir del punto *A* y sobre una recta cualquiera *s* se toma el segmento **c**, se unen los puntos *N* y *M* y por *P* se traza la paralela a $\overline{NM}$. El segmento **x** = **MQ** es el cuarto proporcional.

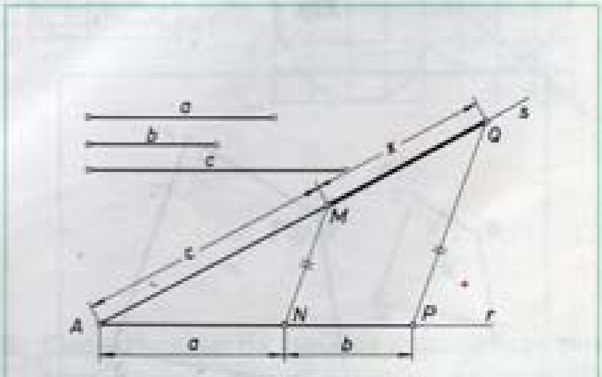


Fig. 1

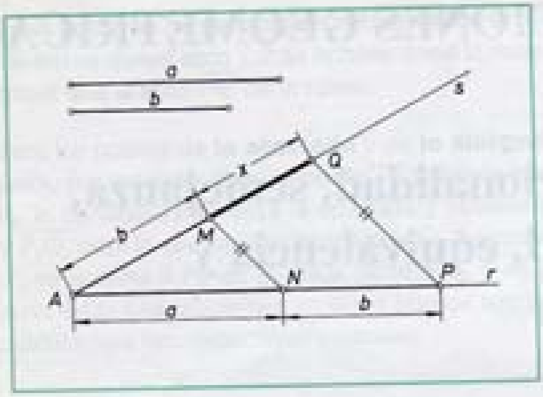


Fig. 2

4. Tercero proporcional (Fig. 2)

Se denomina proporción continua aquella e que los medios o los extremos se repiten: **a/b = b/**c la que **b** es consecuente en la primera razón y ant dente en la segunda.

Tercero proporcional es uno de los términos n petidos de una proporción continua.

El segmento –**x**– que es tercero proporcional segmentos **a** y **b**, conocidos, se expresa así: a/b = En este caso se repite el medio **b**. Se conocen los mentos **a** y **b** y hay que hallar el segmento **x**, te proporcional.

En la **Fig. 2** se opera como en el caso anterio obtiene **x = MQ**.

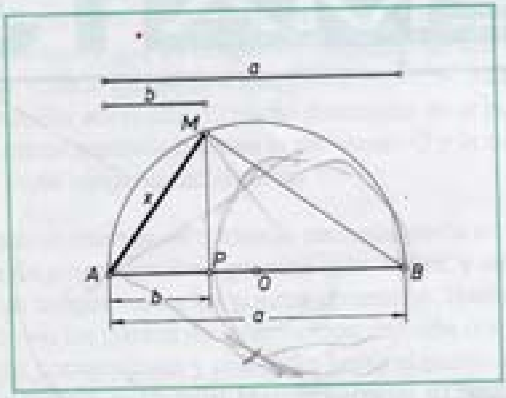


Fig. 3

5. Medio proporcional (Figs. 3 y 4)

Cuando en una proporción continua se desco el término repetido, éste se llama "medio prop nal".

El segmento –**x**– que es medio proporciona segmentos **a** y **b** se expresa así: **a/x = x/b**, o $\mathbf{x^2 = a \cdot b}$.

Se desconoce el medio común –**x**–.

Para hallar gráficamente el segmento **x**, se ap teorema relativo a triángulos rectángulos que di cateto es medio proporcional entre la hipotenus proyección sobre ella. Según esto, **(Fig. 3)**, se t segmento **a** y, superpuesto con él, segmento **b** za la semicircunferencia de diámetro **a** = $\overline{\mathbf{AB}}$ y la perpendicular a $\overline{\mathbf{AB}}$. El segmento **x** = $\overline{\mathbf{AM}}$ es dio proporcional entre los segmentos **a** y **b**.

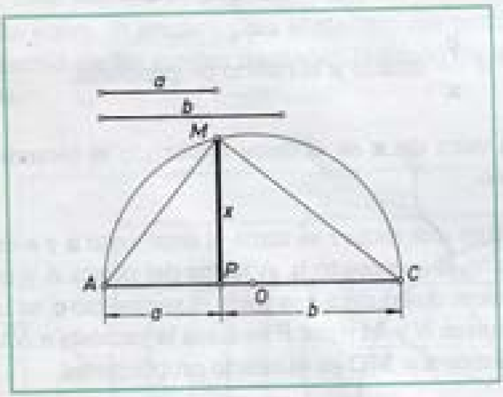


Fig. 4

En la **Fig. 4** se indica otro procedimiento p cular el segmento **x**, medio proporcional. Se t y **b**, uno a continuación de otro y se traza la s cunferencia de diámetro **a + b**; el segmento **x** es la altura sobre la hipotenusa $\overline{AC}$. En este c aplica el teorema que dice: En un triángulo re lo, la altura sobre la hipotenusa es media propo entre los segmentos en que la divide.

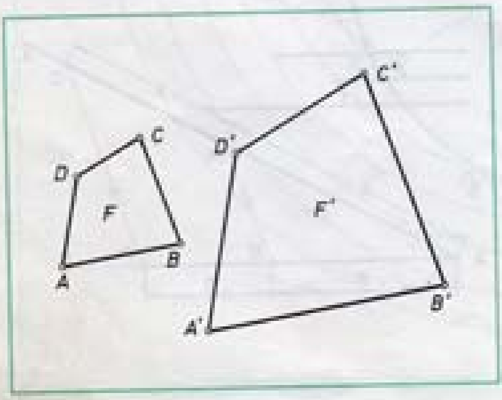


Fig. 5

6. Semejanza

Dos figuras son semejantes o proporcionale do tienen sus ángulos iguales y sus lados son cionales **(Fig. 5)**.

Cada punto de una de ellas tiene su corr diente en la otra y las líneas, que tienen la m rección relativa, están en la misma relación; e ción es la **razón de semejanza**.

En la **Fig. 5**, las figuras semejantes tiene gulos iguales y los lados están en la misma ción, $\overline{AB} = \frac{1}{2}\,\overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \frac{1}{2}\,\overline{B'C'}$.

En geometría se estudian los siguientes teoremas relativos a semejanza de polígonos:

Dos triángulos son semejantes:

1.° Cuando dos ángulos de uno son iguales a dos del otro.

2.° Cuando tienen un ángulo igual formado por lados proporcionales.

3.° Cuando tienen sus lados homólogos proporcionales.

Dos polígonos son semejantes:

1.° Cuando se componen del mismo número de triángulos semejantes de dos en dos e igualmente dispuestos.

2.° Cuando sabemos que todos los lados menos uno en cada polígono son de dos en dos proporcionales e iguales, del mismo modo los ángulos en que no intervengan los lados exceptuados.

3.° Cuando sabemos que todos los ángulos menos uno del primero son iguales respectivamente a otros tantos del segundo y que los lados que forman estos ángulos, menos los del exceptuado, son proporcionales.

7. Construcción de la figura semejante a otra dada conociendo la razón de semejanza

Primer procedimiento (Fig. 6)

Se tiene el polígono $F = ABCDE$ y hay que construir el polígono semejante a él, siendo la razón de semejanza, por ejemplo, $\frac{1}{2}$. Se toma un punto cualquiera P y se une con los vértices del polígono F. El segmento $\overline{PA}$ se divide en dos partes iguales y se fija el punto A', homólogo del A, siendo $\overline{PA'} = \frac{1}{2}\,\overline{PA}$. Por A' se traza la paralela a $\overline{AB}$ hasta que corte en B' a PB; se sigue así por medio de paralelas construyendo el polígono F' que tiene los ángulos iguales y sus lados en la proporción $\frac{1}{2}$ respecto a los del polígono F. Se tiene $\overline{A'B'} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$, $\overline{B'C'} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$, etc.

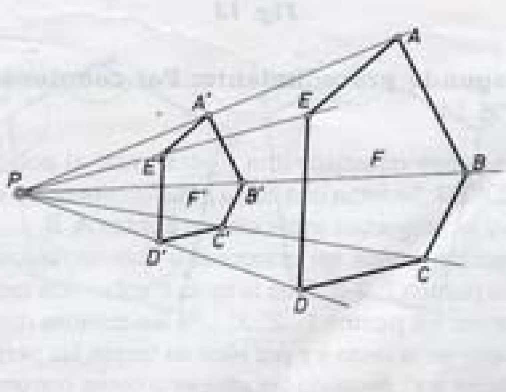


Fig. 6

Segundo procedimiento (Fig. 7)

Se opera como en el caso de igualdad de figuras. Si la razón de semejanza es $2{:}1$, se toma $\overline{1'\text{-}2'} = \frac{1}{2}\,\overline{1\text{-}2}$ y $\overline{2'\text{-}A'} = \frac{1}{2}\,\overline{2\text{-}A}$, es decir, se dividen por 2 las dos coordenadas y se obtiene el polígono F'; la razón de semejanza entre el polígono F dado y el F' es $2{:}1$. La razón de sus áreas es igual al cuadrado de la razón de semejanza, es decir, $4{:}1$.

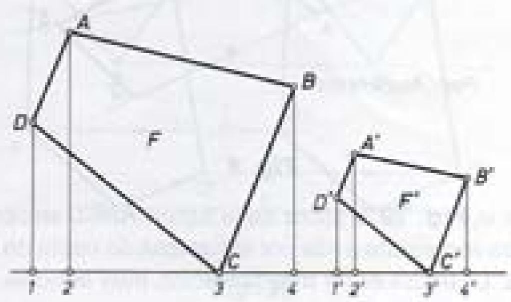


Fig. 7

Tercer procedimiento: Sistema de cuadrícula (Fig. 8)

En la figura dada se construye una cuadrícula $ABCD$ de lado l; si la figura a obtener ha de ser doble, se toma una cuadrícula $A'B'C'D'$ de lado $2l$; sobre esta cuadrícula se marcan los puntos necesarios para construir la figura. La razón de semejanza es la que existe entre los lados de las cuadrículas.

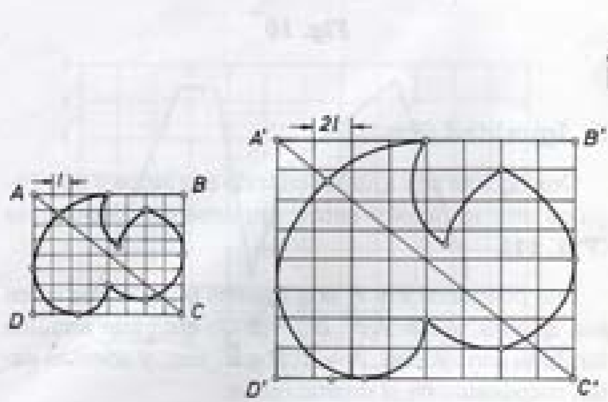


Fig. 8

8. Construcción de figuras semejantes por homotecia y por el sistema de ángulos (Figs. 9 y 10)

En la **Fig. 9** se toma un centro cualquiera P de homotecia y a partir de la figura dada $ABCDEF$ se obtiene otra semejante a ella $A'B'C'D'E'F'$, en este caso doble que la anterior ya que se ha tomado A' de forma que sea $\overline{PA'} = 2 \cdot \overline{PA}$.

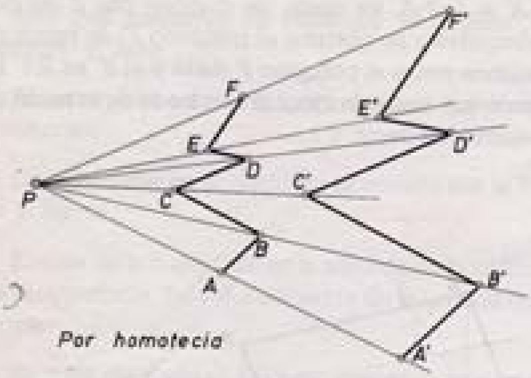


Fig. 9

En la **Fig. 10**, a partir de la figura *ABCD* se obtiene otra semejante a ella por el sistema de copia de ángulos. La figura es de interpretación muy sencilla.

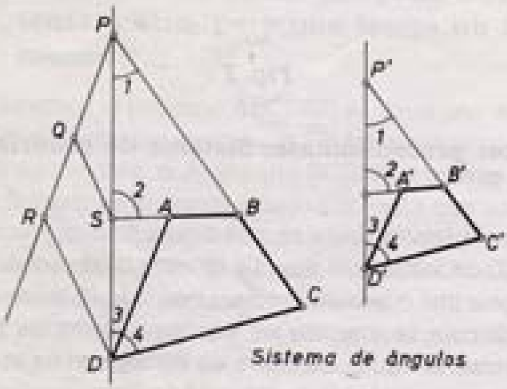


Fig. 10

9. Igualdad (Fig. 11)

Dos figuras son iguales cuando sus lados y sus ángulos son iguales y están igualmente dispuestos **(Fig. 11).**

Los polígonos F y F' son iguales porque sus lados son iguales, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, etc., sus ángulos también son iguales, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, etc., y además están dispuestos en el mismo orden.

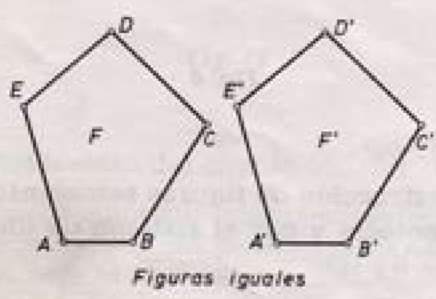


Fig. 11

10. Procedimientos para construir una figura igual a otra (Figs. 12 y 13)

— Primer procedimiento: Por triangulación (Fig. 12)

Se tiene una figura cualquiera *ABCDEF*; se descompone en triángulos por medio de las diagonales que parten de un vértice; en la **Fig. 12** es el vértice *B*; a la derecha se van construyendo uno a uno, y en el mismo orden, los triángulos *1, 2, 3* y *4* de los que se conocen los tres lados.

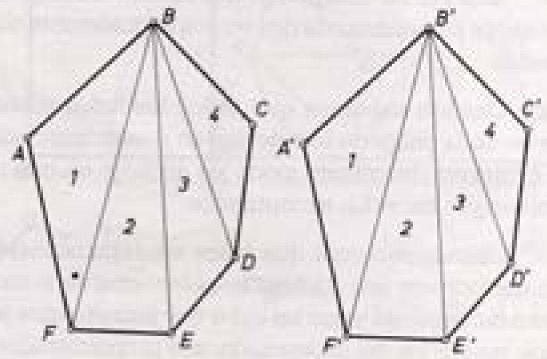


Fig. 12

Se puede tomar otro punto cualquiera exterior o interior a la figura para hacer la descomposición en triángulos. En la **Fig. 13** se toma el punto *P* que se une con todos los vértices, formándose así triángulos.

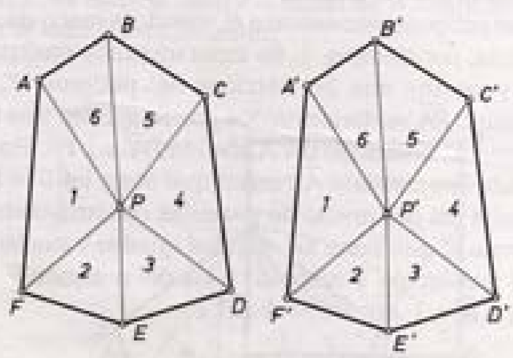


Fig. 13

— Segundo procedimiento: Por coordenadas (Fig. 14)

Se desea construir una figura igual al polígono *ABCDEFG*. Se toma una recta r cualquiera como eje o base y se proyectan sobre ella los puntos A, B, ...; esta proyección puede ser ortogonal u oblicua; se tienen así los puntos $1, 2, 3$, ... en la recta r, sobre otra recta r' se toman los puntos $1', 2', 3'$, ... a las mismas distancias que en la recta r y por ellos se trazan las perpendiculares a r', llevando las alturas o cotas correspondientes; así $\overline{1'\text{-}A'} = \overline{1\text{-}A}$, $\overline{2'\text{-}B'} = \overline{2\text{-}B}$, etc. Este sistema se llama de coordenadas porque se emplea un sistema de coordenadas cartesianas, es decir, las distancias x e y a dos ejes que se indican en la figura.

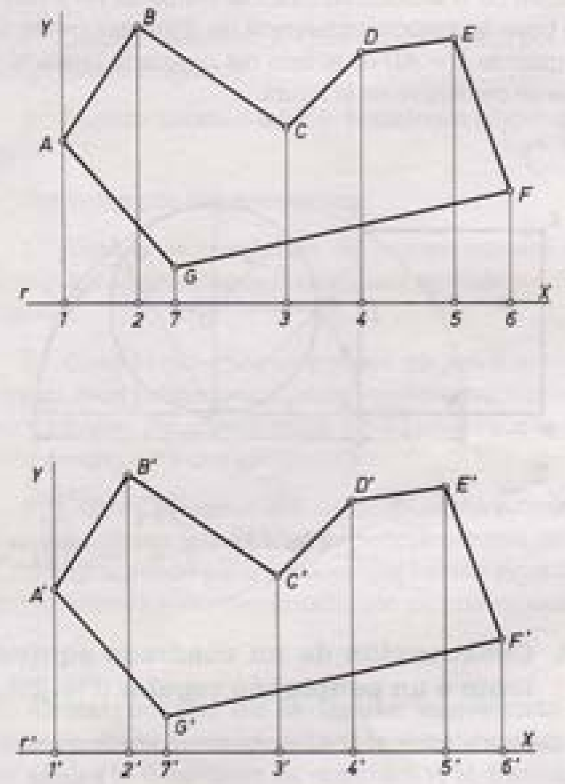


Fig. 14

— Tercer procedimiento. Por copia de ángulos o rodeo (Fig. 15)

Dado el polígono *ABCDE*, se toma $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ y en B' se construye el ángulo $\hat{B}$; sobre su lado se lleva $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ y en C' se lleva el ángulo $\hat{C}$, así sucesivamente se van situando los lados y los ángulos hasta cerrar el polígono. Este método resulta gráficamente inexacto pues se van acumulando pequeños errores en cada operación.

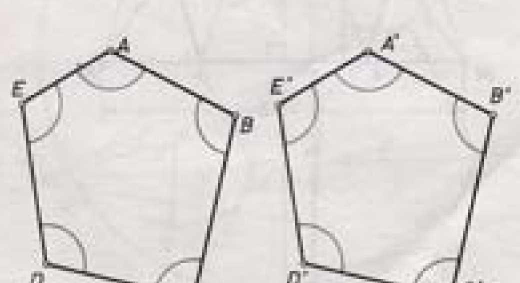


Fig. 15

— Cuarto procedimiento: Por translación (Fig. 16)

Dado el polígono *ABCDEF*, se trazan por su vértice una serie de rectas paralelas *a*, *b*, *c*, ...; se toma un punto cualquiera A' en *a* y por A' se traza la paralela a $\overline{AB}$ hasta que corte en B' a la recta *b*; por B', paralela a $\overline{BC}$ hasta que corte en C' a la recta *c* y así sucesivamente. Este procedimiento es una simple translación.

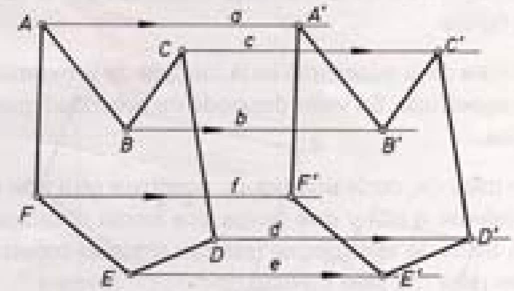


Fig. 16

— Quinto procedimiento: Con el empleo de una cuadrícula (Fig. 17)

Se dibuja una cuadrícula o retícula sobre la figura o bien se superpone una cuadrícula de papel transparente; se fijan los puntos donde la figura corta a las líneas de la retícula y luego se marcan sobre una cuadrícula igual. Realmente, este procedimiento se utiliza más para ampliar figuras, empleando cuadrículas de mayor tamaño que la original y sobre todo se utiliza para hacer cuadros grandes a partir de originales o fotografías pequeñas.

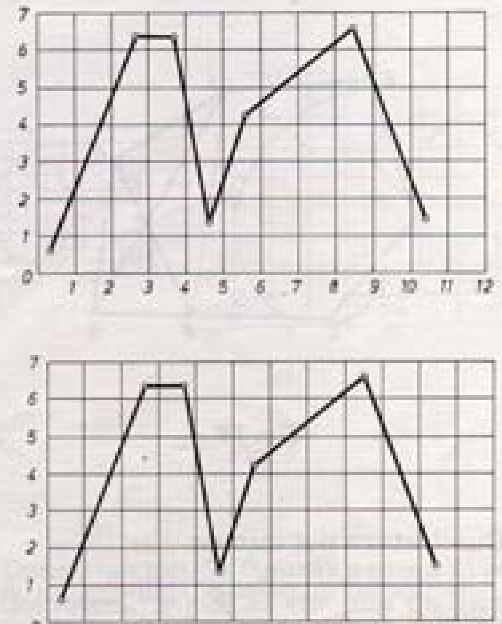


Fig. 17

11. Equivalencia. Figuras equivalentes

Figuras equivalentes son aquellas que tienen la misma extensión.

Hay que distinguir los términos "extensión", "superficie" y "área".

La extensión es una magnitud, igual que longitud y volumen.

La superficie es el conjunto abarcado por la forma de la figura.

El área de la superficie es la medida de la extensión de la superficie. Su valor depende de la unidad que se emplee.

Se trata de, dada una figura, construir otra que sea equivalente a ella y que tenga una forma determinada. A título de ejemplo, se indican algunas construcciones para dar idea de este tipo de problemas.

12. Construcción de un polígono equivalente a otro, pero que tenga un lado menos (Fig. 18)

Tenemos el polígono *ABCDEF*, se toma una diagonal cualquiera, por ejemplo, la $\overline{FB}$, tal que deje aislado a un solo vértice, el *A*; la parte *BCDEF* es común a las dos figuras; se prolonga el lado $\overline{CB}$ hasta que corte a la paralela a la diagonal $\overline{FB}$ trazada por el vértice *A*. Se obtiene así el vértice *G*. El polígono *GCDEF* es equivalente al dado y tiene un lado menos. Los triángulos *ABF* y *GBF* son equivalentes por tener la misma base $\overline{FB}$ e igual altura. De esta forma se pueden disminuir los lados uno a uno hasta tener un triángulo equivalente a la figura dada.

S.

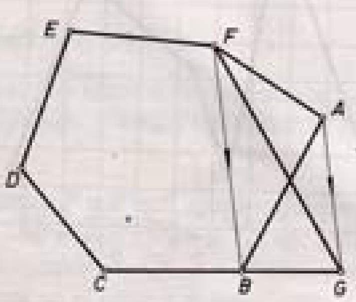
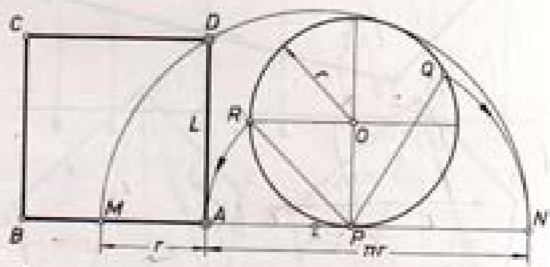


Fig. 18

13. Cuadratura del círculo (Fig. 19)

Se pide construir un cuadrado equivalente a un círculo dado. Aunque este problema no es exacto, ya que interviene en el área el número inconmensurable π, se puede obtener gráficamente con bastante aproximación. El área del círculo es πr^2 y la del cuadrado buscado es L^2. Igualando las dos superficies se tiene $\pi r^2 = L^2$, o lo que es igual: $L^2 = \pi r.r$. De aquí se deduce que el lado *L* del cuadrado que buscamos es media proporcional entre los segmentos πr y *r*. En la figura, se toma el radio *r* y el segmento πr, que es la rectificación de la semicircunferencia (suma de $\overline{PR}$ y $\overline{PO}$) y se traza la semicircunferencia de diámetro $r + \pi r$. El segmento $L = \overline{AD}$ es el lado del cuadrado buscado y que se construye en la figura.

No



$x^2 = \pi r . r = \pi r^2 = L^2$

$L^2 = \pi r . r$

Fig. 19

14. Construcción de un cuadrado equivalente a un pentágono regular (Fig. 20)

Se transforma el pentágono en el triángulo equivalente *1-M-N* mediante las paralelas *5-M* y *2-N* a las diagonales *1-4* y *1-3* del pentágono. Después, a partir del triángulo, se obtiene el cuadrado equivalente: $L^2 = b \cdot a/2$; según esto, basta construir la media proporcional entre la base y la mitad de la altura para tener el lado *L* del cuadrado.

No

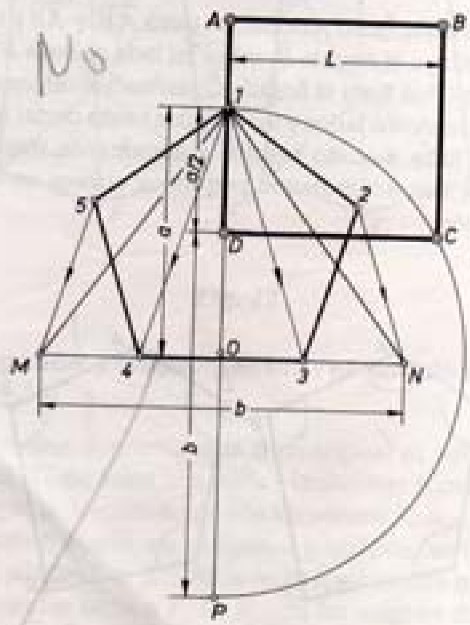


Fig. 20

X

(Perímetro · apotema) / 2

. **Construcción de un cuadrado cuya superficie sea la mitad de la suma de otros tres cuadrados** (Fig. 21)

Los lados de los cuadrados son L_1, L_2 y L_3. La fór-la que nos da el lado del cuadrado solución es: $2L^2$ $_1^2 + L_2^2 + L_3^2$. En la figura está construida esta fór-la y se obtiene el lado L del cuadrado cuya superfi- es la mitad de la suma de las superficies de los adrados cuyos lados son L_1, L_2 y L_3.

2S = (L²+L²)+L²

A²+A² = 2A² = L²

L² = 2A

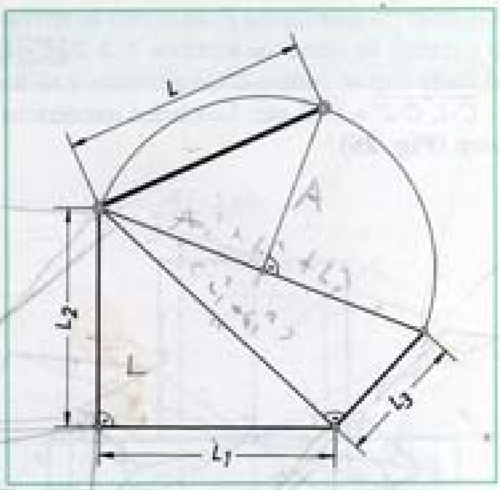


Fig. 21

. **Construcción de un círculo equivalente a una elipse** (Fig. 22)

Se igualan las áreas de las dos figuras y tendremos: $= \pi ab$; de esto se deduce $r^2 = a \cdot b$. Basta hallar la dia proporcional entre los semiejes a y b de la elip- para obtener el radio r del círculo equivalente. En la ura, $\overline{ON} = \overline{OD} = b$ y $\overline{OB} = a$; se traza la semicircun-encia de diámetro $\overline{NB} = a\text{-}b$ y la tangente a ella des- O es el radio $r = \overline{OP}$ de la circunferencia equiva-te a la elipse.

ver

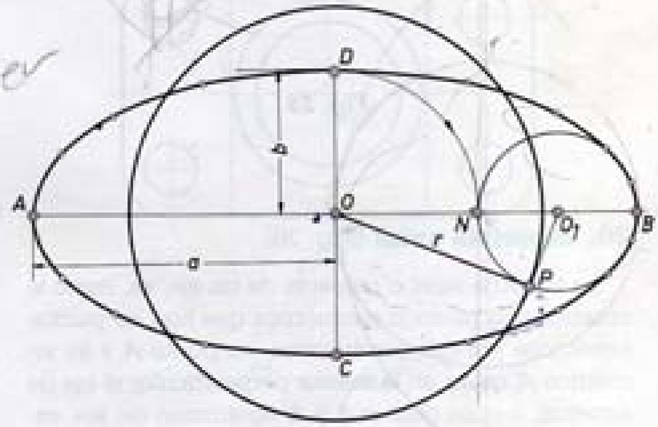


Fig. 22

. **Simetría**

Se dice que dos figuras son simétricas respecto a punto **(centro de simetría)** o a una recta **(eje de metría)** cuando al girar una de ellas alrededor del ntro o del eje, coincide con la otra.

. **Simetría central** (Fig. 23)

Si

Dos puntos A y A' se dice que son simétricos res-cto de un punto C, llamado centro de simetría, ando están en línea recta con él y equidistan de di- centro, $\overline{CA} = \overline{CA'} = d$. Estas dos condiciones las mplen todas las parejas de puntos simétricos.

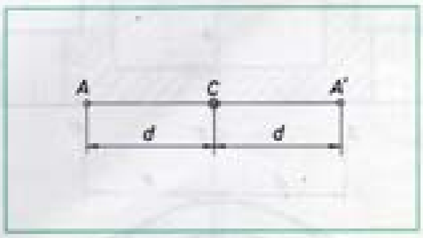


Fig. 23

. **Construcción de la figura simétrica de otra respecto de un punto** (Figs. 24 y 25)

Operamos primero con un segmento **(Fig. 24)**.

Si

Se tiene un segmento r cuyos extremos son N y M; se quiere hallar su simétrico respecto del punto C, do, que es el centro de simetría, basta hallar los ntos simétricos de los extremos; así, el simétrico de es N', tomando $\overline{CN'} = \overline{CN}$ y en la misma línea; el si-trico de M es M', tomando $\overline{CM'} = \overline{CM}$. La solución el segmento r' que resulta paralelo al r. En la sime-a central, los segmentos simétricos son paralelos.

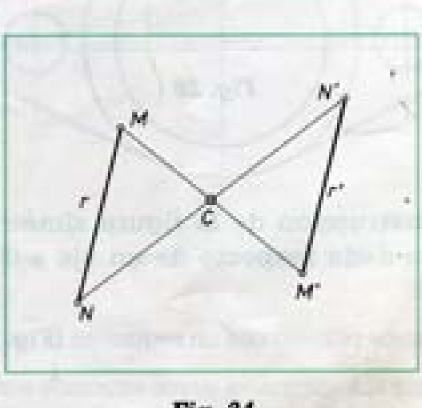


Fig. 24

En el caso de una figura F, se repite la operación, punto a punto; se unen los vértices 1, 2, 3, ... del polígono dado con el centro C de simetría y se toman $\overline{C\text{-}1'} = \overline{C\text{-}1}$, $\overline{C\text{-}2'} = \overline{C\text{-}2}$, etc. Los lados simétricos son paralelos **(Fig. 25)**.

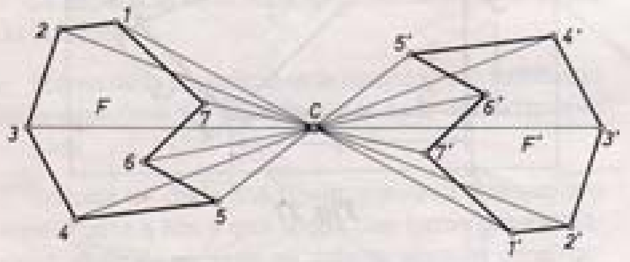


Fig. 25

20. Simetría axial (Fig. 26)

La simetría axial o respecto de un eje, es, como la anterior, una relación geométrica que liga los puntos simétricos por dos condiciones: un punto A y su simétrico A' están en la misma perpendicular al eje de simetría; los dos puntos A y A' equidistan del eje, estando uno a cada lado del mismo.

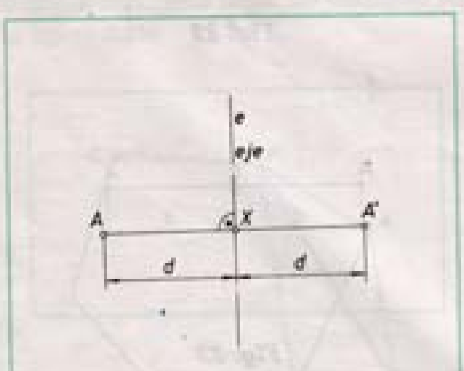


Fig. 26

21. Construcción de la figura simétrica de otra dada respecto de un eje *e* (Figs. 27 y 28)

Operamos primero con un segmento **(Fig. 27)**.

Se tiene el segmento s cuyos extremos son A y B; el simétrico del A es A' y el simétrico de B es B'; el segmento s' que une A' y B' es el simétrico del s. En ... metría axial, las parejas de rectas simétricas se c... en un punto del eje de simetría.

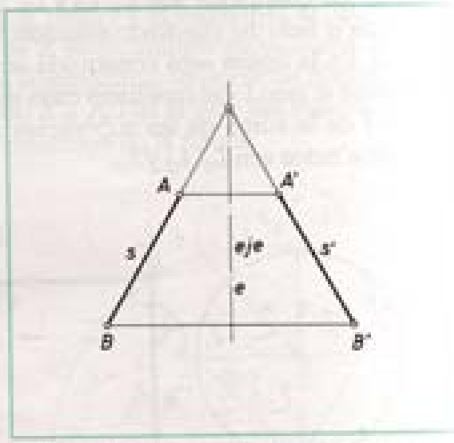


Fig. 27

Repitiendo la operación de hallar el simétrico de punto respecto de un eje, se trazan perpendiculare... dicho eje por los vértices 1, 2, 3, ... de la figura dad... se hallan los correspondientes simétricos $1'$, $2'$, e... En la figura se comprueba que los lados simétricos ... cortan en un punto del eje de simetría **(Fig. 28)**.

La simetría central y axial son las relaciones geométricas que permiten simplificar notablemente un dibujo industrial. Así, si una vista de una pieza es simétrica respecto de un eje, basta dibujar la mitad y si es simétrica respecto a dos ejes perpendiculares, es decir, respecto a un punto, basta dibujar la cuarta parte, indicando los ejes de simetría correspondientes.

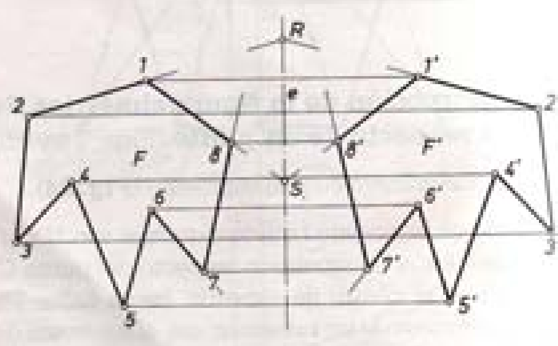


Fig. 28

ACTIVIDADES

1. Obtener gráficamente:

   1.° El segmento tercero proporcional a los segmentos $a = 40$ mm. y $b = 35$ mm.

   2.° El segmento cuarto proporcional a los segmentos: $a = 40$ mm., $b = 30$ mm. y $c = 70$ mm.

   3.° El segmento medio proporcional a los segmentos: $a = 35$ mm. y $b = 40$ mm.

2. Dividir un segmento de 120 mm. en partes proporcionales a 3, 5 y 7.

3. Dado un pentágono regular de 25 mm. de lado, construir el polígono semejante a él siendo la razón de semejanza 2/3 (emplear diversos procedimientos).

4. De cualquier figura que tengáis a mano, poligonal, curva e incluso de cualquier ilustración, reproducirla a tamaño natural empleando el procedimiento más adecuado de los cinco que se han explicado.

5. Construir un triángulo equivalente a un cuadrado de 50 mm. de lado.

6. Tenemos un polígono convexo irregular cualquiera de 6 lados. Construir un triángulo equivalente a él.

7. Dado un cuadrado de 60 mm. de lado, construir el rectángulo equivalente a él, uno de cuyos lados mida 40 mm.

8. A continuación se representan dos piezas por sus vistas diédricas. Teniendo en cuenta la simetría que presentan, dibujarlas de nuevo de la forma más simplificada posible.