TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS (I)

Traslación, giro y homotecia

TEMA 14

1. Transformaciones geométricas

Una transformación es una correspondencia entre dos elementos de un conjunto cualquiera.

Vamos a hacer un estudio del grupo de transformaciones geométricas más sencillo, como son la traslación, el giro y la homotecia.

2. Traslación en el plano (Fig. 1)

Dado un vector $d \equiv \overrightarrow{VV'}$ de un plano α, se llama "traslación" la transformación T de α en sí mismo, de forma que a todo punto A de la figura F le corresponde otro punto A' de la figura F' tal que el vector $\overrightarrow{AA'}$ es equipolente con el $\overrightarrow{VV'}$.

Los vectores equipolentes son iguales en dirección, magnitud y sentido.

Dado un punto A, su transformado A' en la transformación T se representa: $T(A) \equiv A'$.

Al vector $d \equiv \overrightarrow{VV'}$ que define la traslación se le llama "**vector traslación**" y a su módulo o magnitud, dirección y sentido se les denomina "**amplitud**", "**dirección**" y "**sentido de la traslación**".

En la **Fig. 1** se deduce que si $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ también $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ pues $AA'B'B$ es un paralelogramo. Según esto, en toda traslación la figura transformada de un vector es un vector equipolente a él.

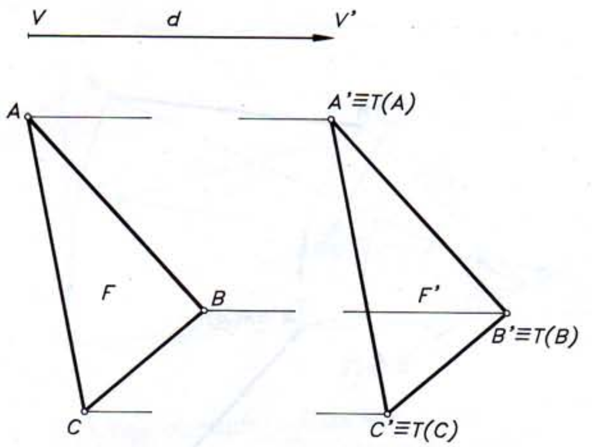

Fig. 1

En toda traslación:

— La figura transformada de una recta es otra recta paralela a ella.

— La figura transformada de un ángulo es otro ángulo igual (congruente con él).

— Cualquier figura poligonal se transforma en otra igual.

— La figura transformada de un círculo es otro círculo igual a él y cuyo centro es el transformado del centro de aquél en la traslación.

Una recta paralela al vector traslación se transforma en sí misma.

Una traslación queda determinada conociendo la posición de dos pares de puntos homólogos A, A' y B, B', siendo los vectores $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{BB'}$ equipolentes.

También, dado un vector $\overrightarrow{VV'}$ en un plano, una traslación de vector $\overrightarrow{VV'}$ quedará determinada, si conociendo la posición de un par B y B', de puntos homólogos, los vectores $\overrightarrow{BB'}$ y $\overrightarrow{VV'}$ son equipolentes.

La aplicación sucesiva de traslaciones produce otra traslación.

La traslación se aplica cuando es necesario aproximar los datos de un problema. También, con el empleo de traslaciones se puede resolver una gran variedad de problemas geométricos.

3. Giro o rotación

Supongamos un punto fijo O de un plano α y dos puntos distintos de dicho plano, tales que $\overline{OA} = \overline{OA'}$. Se llama *"giro o rotación"* de centro O, la transformación biunívoca R del plano α en sí mismo, tal que al punto A le hace corresponder el A' y a todo punto B de α, le corresponde un punto B', tal que $\overline{OB} = \overline{OB'}$ y el ángulo orientado y convexo $\widehat{BOB'}$ sea congruente (igual) con el ángulo orientado y convexo $\widehat{AOA'}$ **(Fig. 2)**.

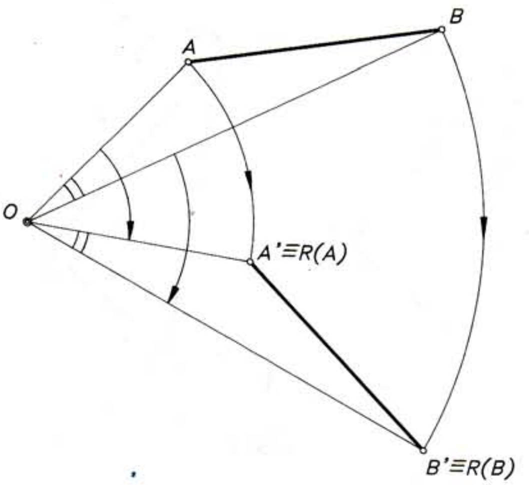

Fig. 2

El punto O es el *centro del giro* y el *único punto doble* (no gira) de la rotación.

El ángulo $\widehat{AOA'}$ es la *amplitud* del giro o rotación.

En un giro se ha de conocer el ángulo de giro y el sentido del mismo.

En esta transformación todos los elementos de una figura giran el mismo ángulo y en el mismo sentido.

Se verifica: $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$ y $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ y por ello, los triángulos AOB y $A'OB'$ son directamente iguales.

En todo giro:

— La figura transformada de una recta es una recta.

En la **Fig. 3**, para girar una recta r, con centro de giro el punto O, se traza la perpendicular por O a la recta r y se gira el punto A la amplitud α hasta el punto A'; se traza la recta r', perpendicular por A' al radio de giro OA' y tendremos la recta girada r' de la dada. Obsérvese que el ángulo recto en A se conserva recto en A'. Cualquier otro punto B de la recta r, en el giro irá a estar en r' según B'. Esto es debido a que los triángulos OAB y $OA'B'$ son iguales.

— La figura transformada de una circunferencia es otra circunferencia igual a ella y cuyo centro es el girado del centro de la primera. Para girar una circunferencia es suficiente con girar el centro y trazar la misma con radio igual.

El producto de dos rotaciones del mismo centro es otra rotación de dicho centro.

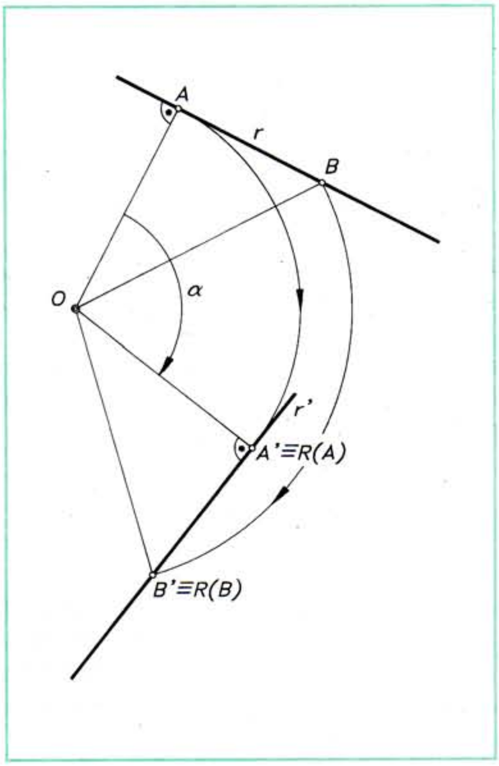

Fig. 3

4. Homotecia

Se dice que dos figuras son homotéticas cuando se corresponden punto a punto y recta a recta, de forma que parejas de puntos homólogos estén en línea recta con un punto fijo, llamado *"centro de homotecia"* y que pareja de rectas homólogas sean paralelas **(Fig. 4)**.

La figura $ABDE$ es homotética de la $A'B'D'E'$. Las rectas AA', BB', DD' y EE', que unen puntos homólogos, pasan por el punto fijo C, centro de homotecia. Las rectas homólogas AB y $A'B'$, BD y $B'D'$, DE y $D'E'$, son paralelas, es decir, se cortan en un punto del infinito, punto impropio.

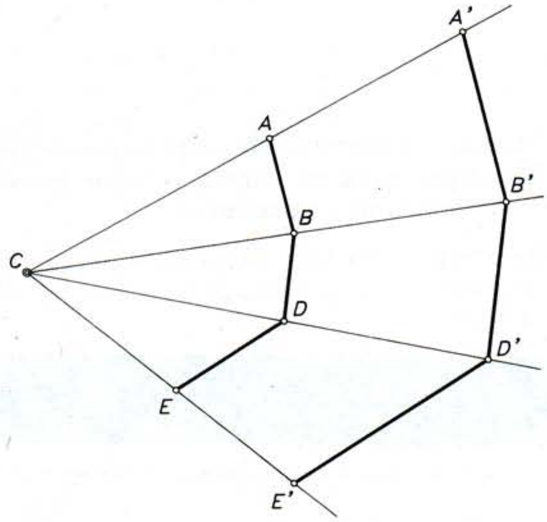

Fig. 4

En el tema siguiente se estudia la homología. Ahora deducimos que la homotecia es una homología cuyo eje es impropio (recta del infinito).

En las figuras homotéticas las rectas homólogas son paralelas y, por lo tanto, son figuras semejantes. Dos figuras semejantes son homotéticas cuando sus rectas homólogas son paralelas.

La relación constante $\overline{CA} : \overline{CA'} = \pm K$ se llama **característica o razón de la homotecia.** En la **Fig. 5**, la razón es positiva y la homotecia se llama **directa**. En la **Fig. 6**, la razón es negativa y la homotecia se llama **inversa**.

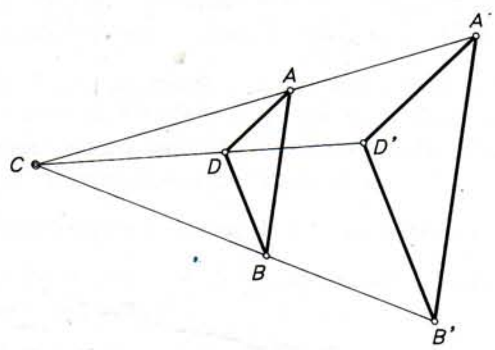

Fig. 5

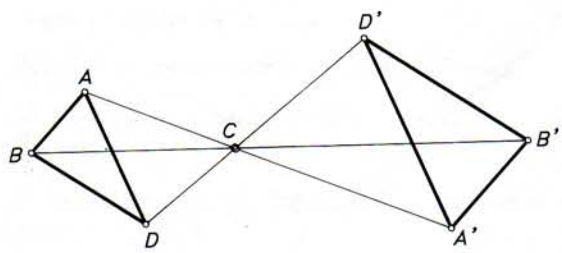

Fig. 6

La homotecia queda definida por su centro C y la razón K.

Si $K = 1$, la homotecia es una **identidad**.

Si $K = -1$, la homotecia es una **simetría central**, ya que A y A', B y B', etc., son simétricos respecto de C **(Fig. 7)**.

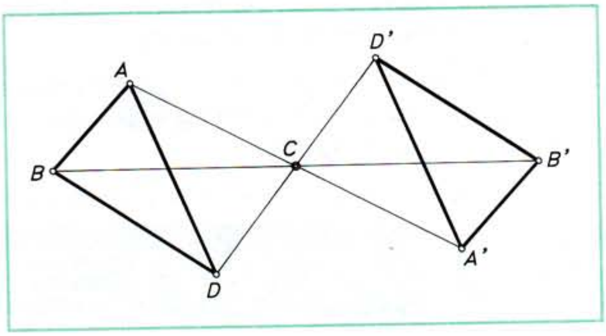

Fig. 7

Las rectas que pasan por el centro de homotecia son dobles.

En las figuras homotéticas los ángulos homólogos son iguales por la condición de paralelismo de las rectas homólogas.

Dos segmentos paralelos AB y $A'B'$ son homotéticos respecto de dos centros C_1 y C_2 en una homotecia directa y en otra inversa **(Fig. 8)**.

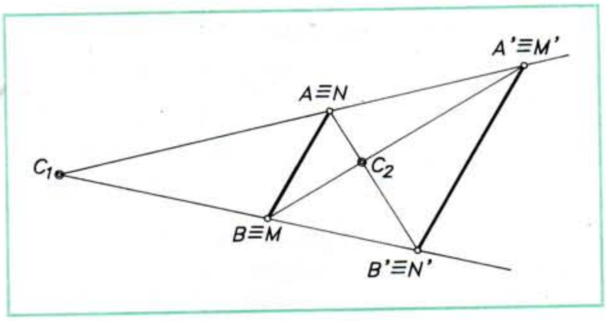

Fig. 8

Dos circunferencias son siempre homotéticas, siendo los centros de homotecia directa C_1 e inversa C_2, puntos de intersección de las tangentes comunes exteriores o interiores a ellas **(Fig. 9)**.

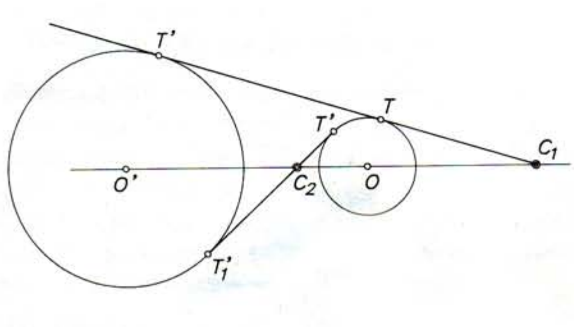

Fig. 9

ACTIVIDADES

1. Dada una figura poligonal y el vector traslación $\overrightarrow{VV'}$ de 5 cm., hallar la figura transformada.
2. Tenemos una recta *r* y un punto *O* que dista de ella 4 cm. Girar la recta *r* hasta que su transformada forme con ella un ángulo de 60º.
3. Citar algún ejemplo donde se haga aplicación práctica de una traslación o de un giro.
4. Tenemos un segmento *PQ* y otro segmento igual *P'Q'*, transformado del primero en un giro. Hallar el centro de giro de la transformación.
5. Dado un pentágono regular, dibujar el polígono homotético de él, cuya razón de homotecia sea 2/3, –3/2 ó –1.