# POTENCIA

## Eje radical y centro radical

# TEMA 6

### Introducción

En este tema vamos a fijar los conceptos de "**potencia**", "**eje radical**" y "**centro radical**" por su aplicación a la resolución de problemas de tangencia.

### 1. Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Veamos la relación que existe entre un punto *P* y una circunferencia *C* (de centro *C*) **(Fig. 1)**.

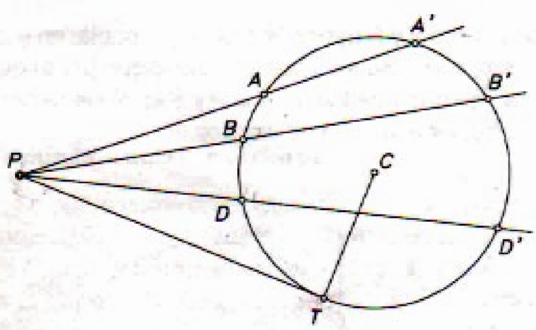


***Fig. 1***

Se define como "**potencia**" de un punto *P* respecto de una circunferencia *C*, al producto constante **K**:

$$\ldots B \cdot \overline{PB'} = \overline{PD} \cdot \overline{PD'} = \overline{PT} \cdot \overline{PT} = \overline{PT}^2$$

... de tangencia de la recta tangente ... la circunferencia.

Veamos en la **Fig. 2**:

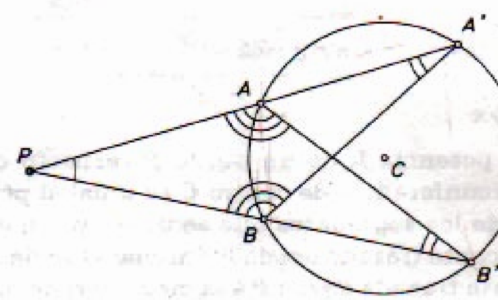


***Fig. 2***

Los triángulos *PBA'* y *PAB'* tienen los ángulos iguales y son semejantes inversos:

— El ángulo en *P* es común.

— Los ángulos en *A'* y en *B'* son iguales por ser inscritos que abarcan el mismo arco *AB* de circunferencia.

— Por tanto, los terceros ángulos *A* y *B* son también iguales.

Se puede establecer la relación:

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{PB'}} \text{ es decir } \overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'} = K$$

**K** es la constante que da el valor de la potencia del punto *P* respecto a la circunferencia *C*. Esta relación se verifica para cualquier otra secante trazada desde *P*.

Si los puntos $B$ y $B'$ tienden a confundirse en un sólo punto estaremos en el caso de la **Fig. 3**:

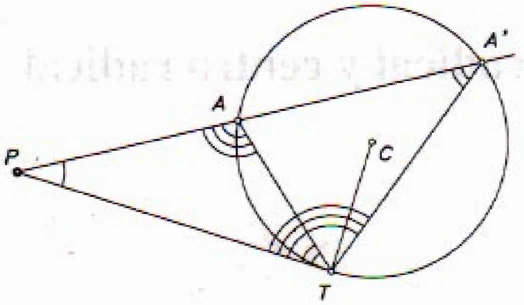


***Fig. 3***

Los triángulos $PAT$ y $PTA'$ cumplen la misma relación:

— El ángulo en $P$ es común.

— Los ángulos en $T$ y en $A'$ también son iguales. El ángulo en $T$, semiinscrito que abarca el arco $AT$ y el ángulo en $A'$, inscrito que abarca el mismo arco.

Los terceros ángulos también son iguales y, por tanto, los triángulos son semejantes inversos. Sus lados cumplen la proporción:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PA'}} \quad \text{de donde } \overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PT}^2 = K$$

Resumiendo: $\boxed{K = Pot\,P(C) = \overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PT}^2}$

que se lee:

**"La potencia $K$ de un punto $P$ respecto de una circunferencia de centro $C$ es igual al producto de los segmentos que se determinan en una secante trazada desde $P$ o al cuadrado de la tangente trazada desde $P$ a la circunferencia."**

Si el punto $P$ es interior a la circunferencia, la potencia es negativa, ya que los segmentos tienen signos contrarios **(Fig. 4)**.

$$\boxed{-K = \overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'} = \overline{PD} \cdot \overline{PD'}}$$

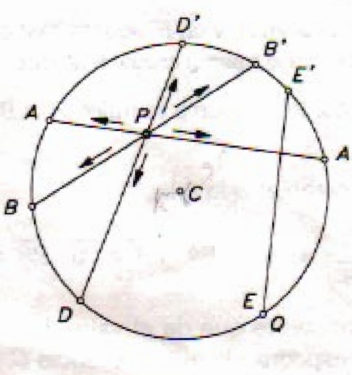


***Fig. 4***

Los puntos de la circunferencia tienen potencia cero pues uno de los segmentos es nulo. Para el punto $Q$, los segmentos son $\overline{QE}$ y $\overline{QE'}$ y el primero se reduce a un punto.

En la **Fig. 5** se comprueba que los triángulos $PAB'$ y $PA'B$ tienen los ángulos iguales. El ángulo en $P$ es opuesto por el vértice. Los ángulos en $A'$ y en $B'$ abarcan el mismo arco $AB$ y los ángulos en $A$ y en $B$, abarcan el mismo arco $A'B'$.

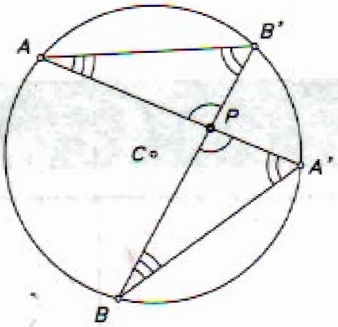


***Fig. 5***

## 2. Eje radical de dos circunferencias

**"El eje radical de dos circunferencias coplanarias es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto de las dos circunferencias."**

El eje radical es siempre una recta perpendicular a la línea de centros de las dos circunferencias.

Veamos los diversos casos según la posición relativa de las circunferencias.

**Circunferencias secantes** (Fig. 6)

Los puntos $P$ y $S$ tienen la misma potencia, en este caso cero, respecto a cada circunferencia, por lo que la recta –$e$– que une los puntos $P$ y $S$ es el eje radical, perpendicular a la línea de centros.

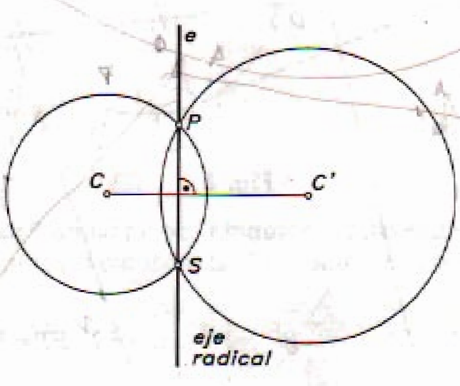


***Fig. 6***

**Circunferencias exteriores** (Fig. 7)

Se traza una circunferencia cualquiera (de centro $O$) que corte a las dos circunferencias de centros $C$ y $C'$. Se hayan los ejes radicales $AA'$ y $BB'$ de la circunferencia auxiliar con cada una de las dadas, obteniendo el punto $P$, intersección de los ejes obtenidos, el cual tendrá la misma potencia respecto a las circunferencias $C$ y $C'$.

La perpendicular por $P$ a la recta de centros $CC'$ es el eje radical.

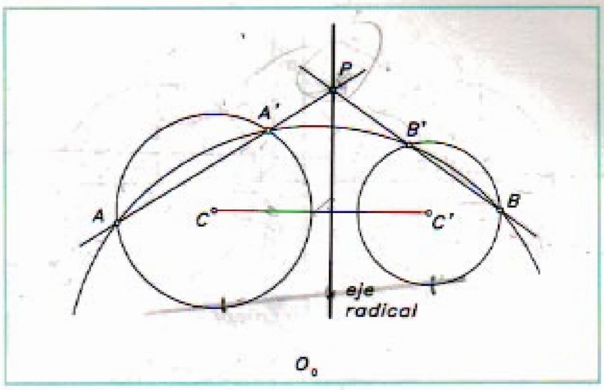


*Fig. 7*

**Circunferencias tangentes interiores** (Fig. 8)

El centro radical es la perpendicular por $T$ a la recta $CC'$, es decir, la tangente común. El punto $T$ de tangencia tiene potencia cero respecto a las dos circunferencias.

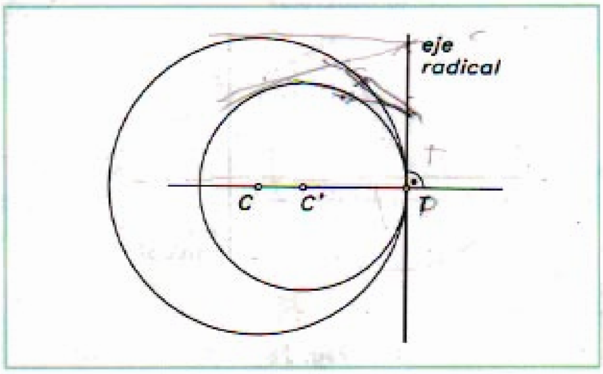


*Fig. 8*

**Circunferencias tangentes exteriores** (Fig. 9)

Igualmente, el eje radical es la tangente común.

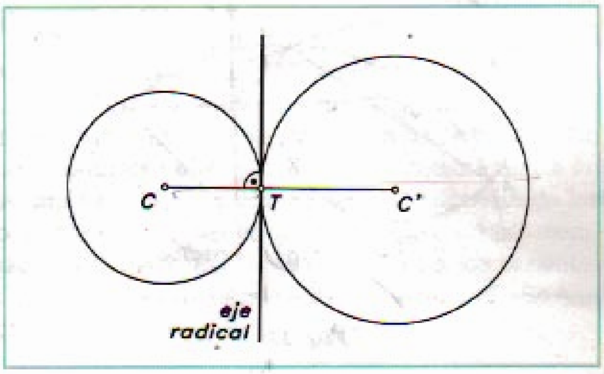


*Fig. 9*

**Circunferencias interiores** (Fig. 10)

Se opera como en el caso de circunferencias exteriores. Una circunferencia auxiliar cualquiera, de centro $O$, nos determina los ejes radicales que se cortan en $P$. El eje radical es la perpendicular por $P$ a la recta de centros.

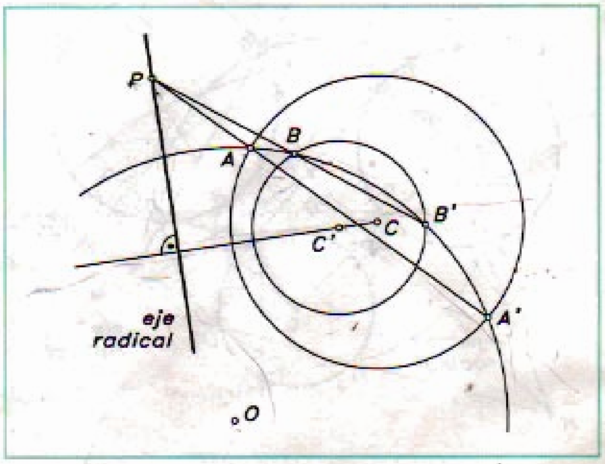


*Fig. 10*

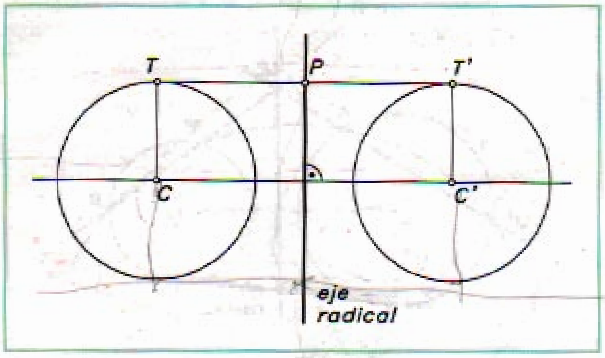


*Fig. 11*

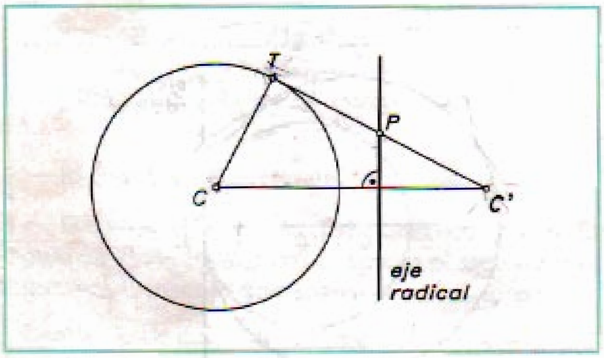


*Fig. 12*

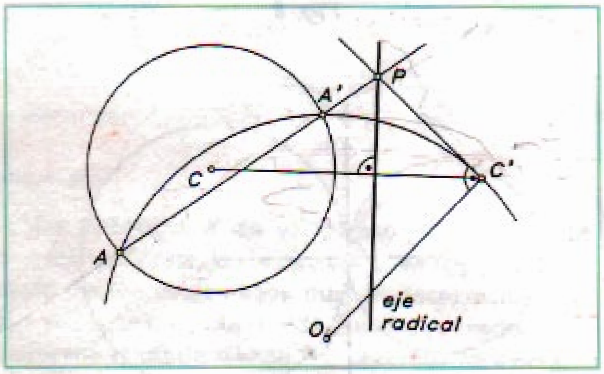


*Fig. 13*

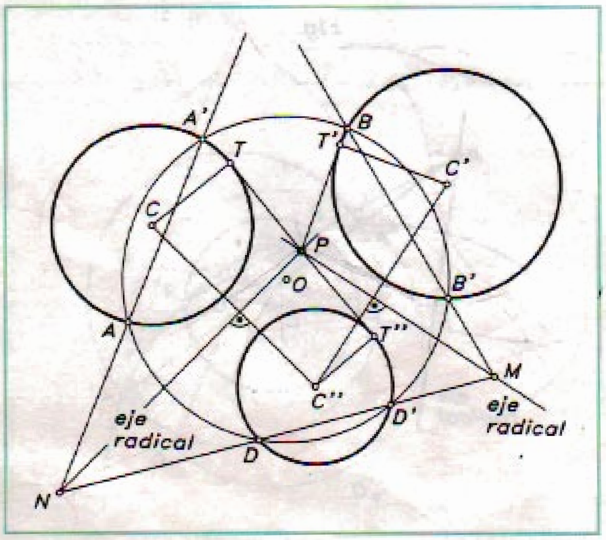


*Fig. 14*

**Circunferencias iguales** (Fig. 11)

Se deduce fácilmente que el eje radical es la mediatriz de $CC'$, o lo que es lo mismo, la perpendicular por $P$ a $CC'$, siendo $P$ el punto medio de $TT'$, pues se ha de cumplir:

$$\overline{PT}^2 = \overline{PT'}^2$$

Si una circunferencia tiene radio cero, es decir, se reduce a un punto, el eje radical se obtiene en la **Fig. 12**.

Se traza la tangente $C'T$ y se determina el punto medio $P$ del segmento $C'T$. El eje radical es la perpendicular por $P$ a la recta de centros $CC'$.

También se puede obtener trazando una circunferencia auxiliar que pase por $C'$ y corte a la de centro $C$. La recta $AA'$ corta a la tangente en $C'$ en el punto $P$, que es del eje radical. **(Fig. 13)**.

## 3. Centro radical de tres circunferencias (Fig. 14)

**"Es el punto del plano que tiene la misma potencia respecto a las tres circunferencias".** Según esto, se hallan los ejes radicales de cada pareja de circunferencias y el punto de intersección $P$ tendrá la misma potencia respecto a las tres. El centro radical es el punto $P$ y, por ello, son iguales los segmentos de tangentes trazadas desde $P$ a las circunferencias: $\overline{PT} = \overline{PT'} = \overline{PT''}$.

**Circunferencias coaxiales: Son aquellas que tienen el mismo eje radical**

En la **Fig. 15** se representa un haz de circunferencias coaxiales secantes. Todas las circunferencias pasan por los puntos $P$ y $Q$, siendo la recta $PQ$ el eje radical común.

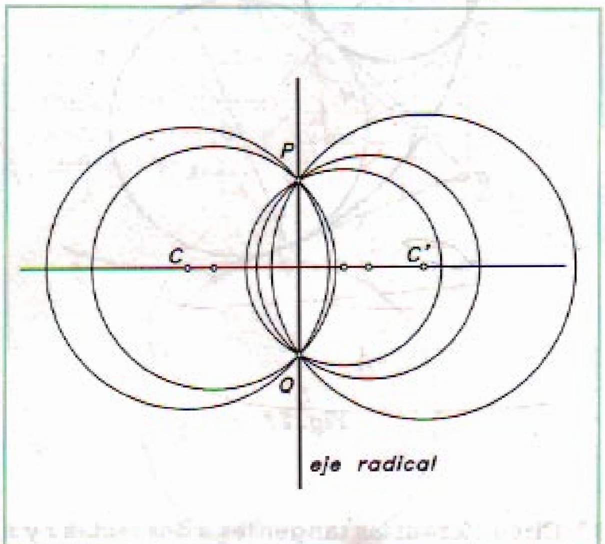


*Fig. 15*

En la **Fig. 16** tenemos un haz de circunferencias coaxiales tangentes exteriores, cuyo eje radical es la tangente común en el punto $T$.

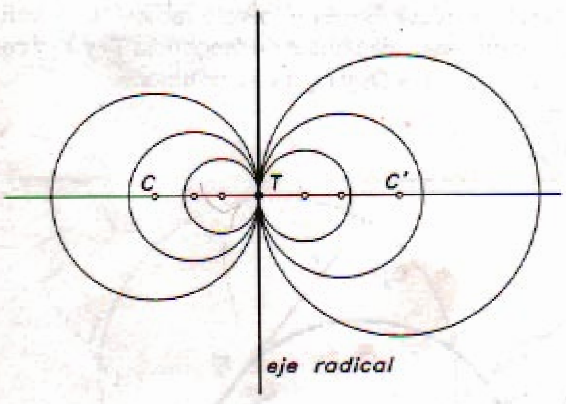


*Fig. 16*

En la **Fig. 17,** si tomamos un punto $P$ del eje radical y trazamos desde él las tangentes a las circunferencias coaxiales, por definición de potencia, los segmentos $\overline{PT}$ serán iguales y, por lo tanto, se verifica que los puntos de tangencia $T$ están en una misma circunferencia de centro $P$ y radio $\overline{PT}$:

$$\overline{PB}\cdot\overline{PB'}=\overline{PT}^2=K$$

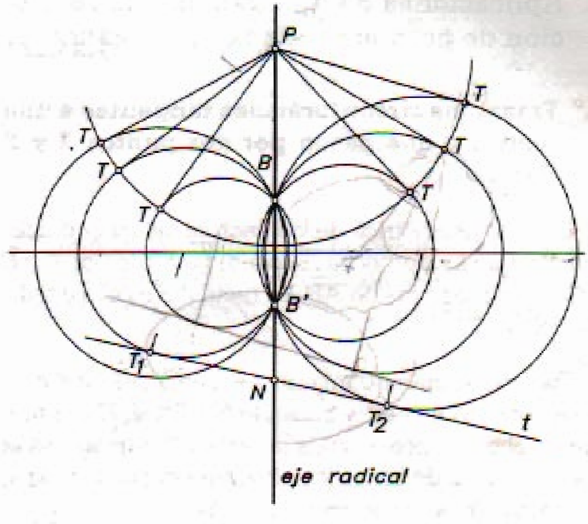


*Fig. 17*

Una recta $t$, tangente a dos circunferencias en los puntos $T_1$ y $T_2$, corta al eje radical en el punto $N$ y se verifica:

$$\overline{NT_1}=\overline{NT_2}$$

Si queremos hallar un haz no secante de circunferencias coaxiales, utilizamos la propiedad anterior para hallar los centros de las circunferencias **(Fig. 18)**.

Sean las circunferencias de centros $C$ y $C'$, cuyo eje radical está obtenido gráficamente con ayuda de la circunferencia auxiliar de centro $O$. Desde un punto $P$ del eje trazamos la tangente $PT$ a la de centro $C'$. Con centros en $P$ y radio $\overline{PT}$, trazamos la circunferencia en la que estarán todos los puntos de tangencia de las circunferencias del haz buscado. Tomamos por ejemplo $T_1$ y la perpendicular $T_1C_1$ a $PT_1$ nos da el centro $C_1$ en la recta de centros. El radio sería $\overline{C_1T_1}$. Se han obtenido otros centros $C_2$, $C_3$ y $C_4$.

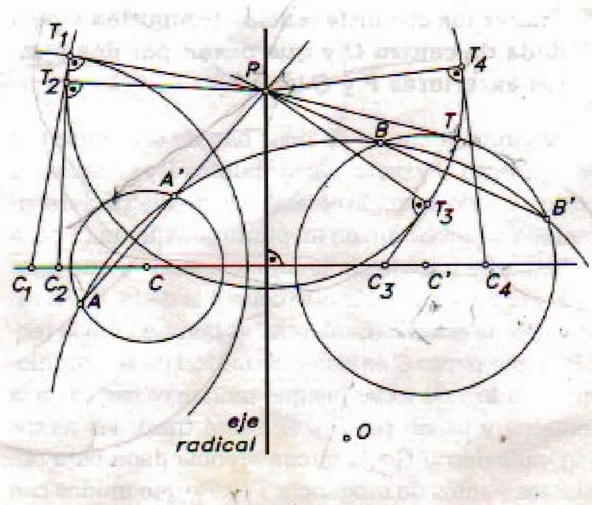


*Fig. 18*

## 4. Aplicaciones de la potencia a la resolución de problemas de tangencias

### 1.° Trazar las circunferencias tangentes a una recta *r* y que pasen por dos puntos *A* y *B* (Fig. 19)

El lugar geométrico de los centros de las circunferencias que forman el haz secante pasando por $A$ y $B$ es la mediatriz –$m$– de $\overline{AB}$. La recta $AB$ es el eje radical del haz.

Tomamos una circunferencias cualquiera del haz, la de centro $C$ en –$m$– y pasando por $A$ y $B$. El punto $P$ donde el eje radical corta a la recta $t$ (tangente) es el centro radical de todas las circunferencias del haz y, por tanto, de las soluciones buscadas.

Desde $P$ trazamos la tangente $PT$ a la circunferencia auxiliar. Este segmento $\overline{PT}$ es la longitud de las tangentes trazadas desde $P$ a todas las circunferencias del haz, por ello, con centro en $P$ y radio $\overline{PT}$ se corta a la recta $r$ en los puntos $T_1$ y $T_2$, que son los puntos de tangencia en la recta $r$; trazando las perpendiculares a $r$ por ellos, se obtienen los centros $C_1$ y $C_2$ de las soluciones.

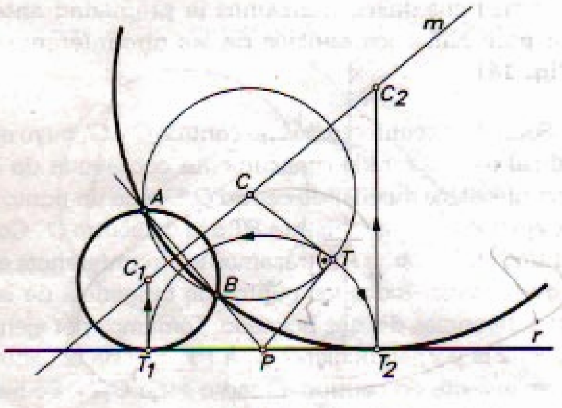


*Fig. 19*

### 2.° Trazar las circunferencias tangentes a otra dada de centro *O* y que pasen por dos puntos exteriores *P* y *Q* (Fig. 20)

Las circunferencias pedidas han de ser tangentes a la de centro $O$ y pasar por los puntos $P$ y $Q$ dados. El centro de cada solución estará en la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$. Con centro en un punto cualquiera $O'$ de la mediatriz, se traza la circunferencia auxiliar que pase por $P$ y $Q$ y a ser posible que corte a la dada. El eje radical $MN$ de estas circunferencias corta en $C$ a la recta $PQ$; este punto $C$ es el centro radical de la circunferencia dada y de todas las que tengan el centro en la mediatriz y pasen por $P$ y $Q$; basta trazar las rectas tangentes desde $C$ a la circunferencia dada para obtener los puntos de tangencia $T_1$ y $T_2$, que unidos con $O$, dan los centros $O_1$ y $O_2$ de las soluciones en la mediatriz de $\overline{PQ}$.

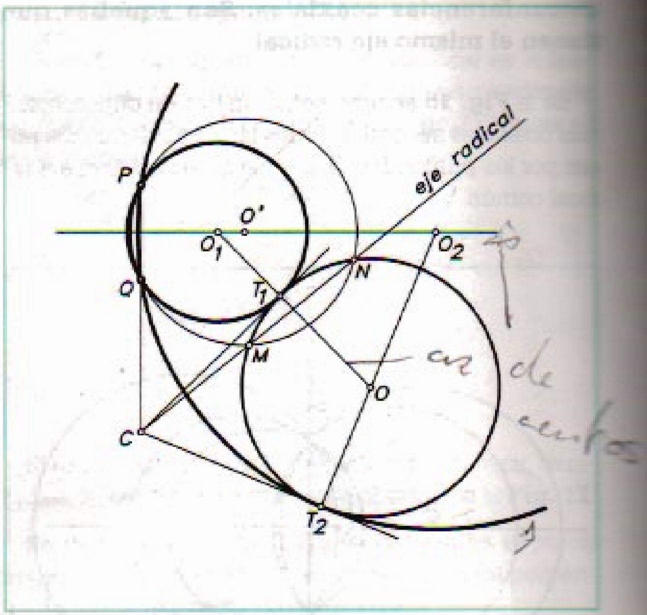


*Fig. 20*

### 3.° Circunferencias tangentes a dos rectas *r* y *s* que se cortan y que pasen por un punto *P* dado (Fig. 21)

Las circunferencias soluciones han de pasar por el punto $P$ y por el $P'$, simétrico del $P$ respecto de la bisectriz del ángulo que forman $r$ y $s$. Ahora el caso se reduce al problema n.° 1. La recta $PP'$ es el eje radical de todas las circunferencias con centro en la bisectriz y que pasen por $P$ y $P'$. El punto $M$, donde corta el eje radical a la recta –$s$– es el centro radical. Con radio $\overline{MT_o}$ se obtienen los puntos de tangencia $T_1$ y $T_2$ y con éstos, los centros $O_1$ y $O_2$ de las soluciones.

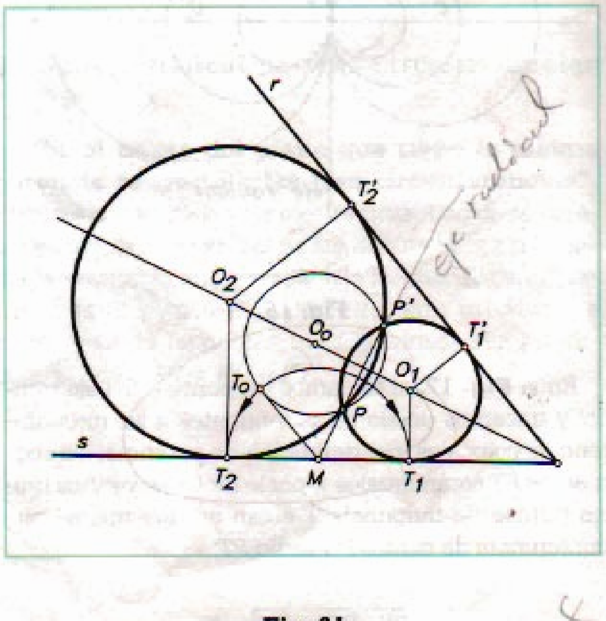


*Fig. 21*

4