TANGENCIAS

Inversión. Enlace de líneas. Rectificaciones

TEMA 7

1. Nociones de inversión (Figs. 1, 2 y 3)

Damos aquí algunos conceptos de inversión porque esta teoría es la base de algunos problemas de tangencias que se estudiarán en cursos superiores.

La inversión es una transformación geométrica. Se dice que dos puntos son inversos cuando cumplen las siguientes condiciones:

1.ª Estar en línea recta con otro punto C, fijo, llamado centro de inversión.

2.ª Que el producto de las distancias de los puntos al centro de inversión sea una cantidad constante, llamada potencia de inversión K. En la **Fig. 1** se verifica: $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = K$.

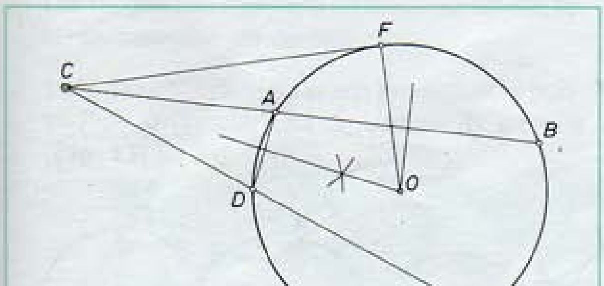

Fig. 1

Si otros dos puntos del plano cumplen las mismas condiciones, también son inversos el uno del otro y viceversa. Dado un punto D, para hallar su inverso, se hace pasar la circunferencia que determinen los puntos A, B y D; la recta CD corta a la circunferencia en E, punto inverso del D. Se funda esto en el concepto de potencia de un punto respecto de una circunferencia, pues: $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{CD} \cdot \overline{CE} = K$.

De lo anterior podemos deducir el siguiente teorema: *"Dos pares de puntos inversos son concíclicos, es decir, pertenecen a una misma circunferencia"*.

El conjunto de puntos A, D, ... forma una figura que es inversa de la figura constituida por los puntos B, E, ...

Se llama **circunferencia de puntos dobles** aquella que contiene los puntos que son inversos de sí mismos, es decir, aquellos que su distancia al centro de inversión es la raíz cuadrada de la potencia de inversión. Por ejemplo, para el punto F de la **Fig. 1** se tiene: $\overline{FC} \cdot \overline{FC} = K$; $\overline{FC} = \sqrt{K}$. que una

Teorema: La figura inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta que no pasa por dicho centro y que es perpendicular a la recta que une el centro de la circunferencia con el centro de inversión **(Fig. 2)**.

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = K;\ \overline{CD} \cdot \overline{CE} = K;\ \overline{CF} \cdot \overline{CG} = K;\ \overline{AB} \cdot \overline{AC} = K';\ \overline{AH} \cdot \overline{AM} = K'.$$

En la figura C es el centro de inversión, A inverso de B, D inverso de E, F inverso de G, etc. Si el punto A fuera el centro de inversión, el inverso de B sería C, el inverso de H es el punto M, etc.

Según sea la potencia de inversión, la recta puede ser exterior, tangente o secante a la circunferencia, pero siempre perpendicular a la recta OC.

Si conocemos el punto C, centro de inversión, y la recta r, además de la potencia K de inversión, podemos hallar su figura inversa, la circunferencia, sabiendo que su centro está en la perpendicular por C a r y que se verifica: $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = K = \sqrt{K} \cdot \sqrt{K}$, en donde sólo se desconoce el segmento $\overline{CA}$; basta, pues, hallar la tercera proporcional entre la raíz cuadrada de K y el segmento $\overline{CB}$.

Teorema: La figura inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia que tampoco pasa por él y que es homotética con la primera **(Fig. 3)**.

En la figura se verifica: A inverso de A', $\overline{CA} \cdot \overline{CA'} = K$; B inverso de B', pues $\overline{CB} \cdot \overline{CB'} = K$. D inverso de D'; H lo es de H'; M de M', y, por fin, E es inverso de E'.

Si conocemos C, la circunferencia de centro O y la potencia K, podemos hallar su figura inversa, es decir, la circunferencia de centro O' sabiendo que se verifica:

$$\overline{CA} \cdot \overline{CA'} = \sqrt{K} \cdot \sqrt{K};\ \overline{CA'} = \frac{\sqrt{K} \cdot \sqrt{K}}{\overline{CA}}$$

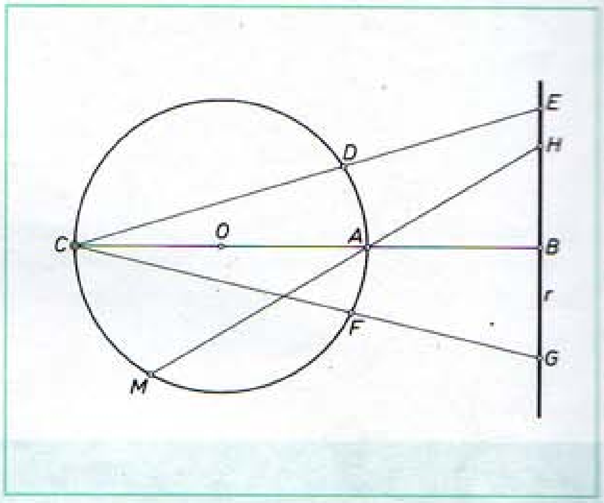

Fig. 2

es decir, $\overline{CA'}$ es la tercera proporcional entre $\sqrt{K}$ y $\overline{CA}$. Una vez conocido el punto A', se traza por él la perpendicular a la recta $\overline{CA}$ y obtenemos el centro O' de la circunferencia de radio $\overline{O'A'}$.

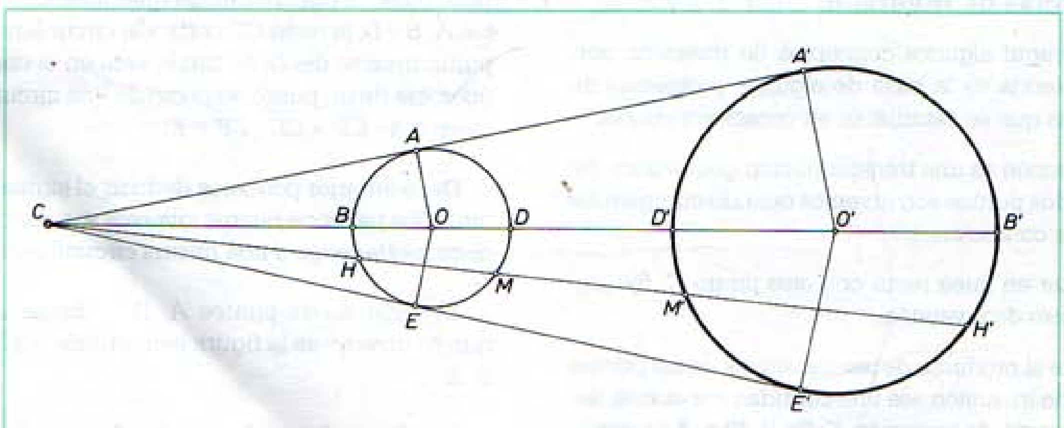

Fig. 3

2. Posiciones relativas de recta y circunferencia

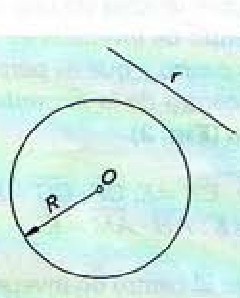

Fig. 4

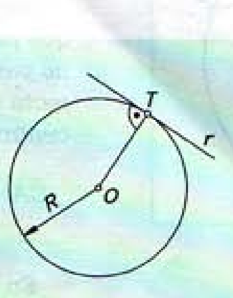

Fig. 5

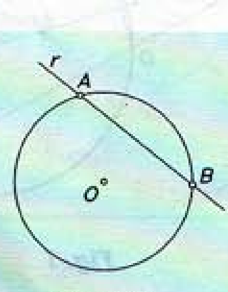

Fig. 6

3. Posiciones relativas de dos circunferencias

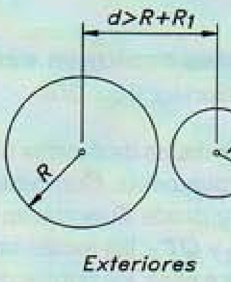

Fig. 7

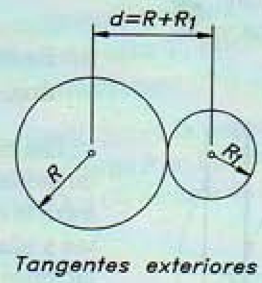

Fig. 8

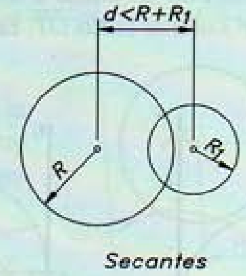

Fig. 9

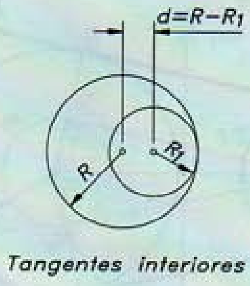

Fig. 10

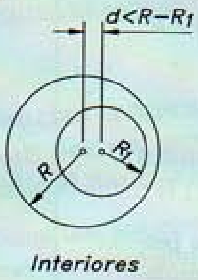

Fig. 11

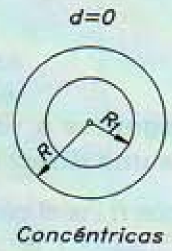

Fig. 12

4. Consideraciones sobre tangencias

En la práctica del Dibujo Técnico los problemas de tangencias o de enlace de líneas que se presentan son muy sencillos. Según esto, nos limitamos a la resolución de aquellos casos de aplicación práctica. Los demás problemas tienen un interés puramente geométrico.

Una recta y una circunferencia o dos circunferencias son tangentes cuando tienen un solo punto común.

Las tangencias o enlaces de líneas se fundan en las propiedades siguientes:

1. Si dos circunferencias son tangentes, el punto T de tangencia está en la línea de centros **(Fig. 13)**.

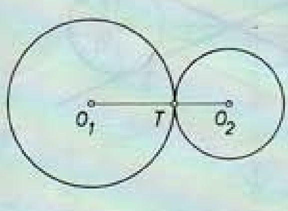

Fig. 13

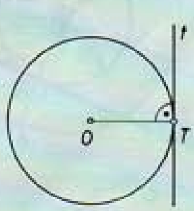

Fig. 14

2. Si una recta es tangente a una circunferencia, el punto de tangencia T es el pie de la perpendicular trazada por el centro O a la recta tangente **(Fig. 14)**.

También hay que tener en cuenta lo siguiente: "Todo radio perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales, así como también el arco que ésta subtiende, de donde se deduce que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro" **(Fig. 15)**.

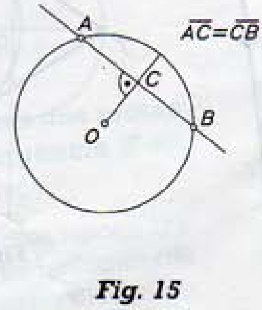

Fig. 15

Para resolver los problemas de tangencias basta fijarse en los datos y en lo que se desea obtener, razonando las construcciones paso a paso y el "porqué de ellas". También debe estudiarse si el problema tiene una o más soluciones.

5. Recta tangente a una circunferencia en un punto *T* de ella (Fig. 16)

La tangente t en un punto T a una circunferencia es la perpendicular al radio $\overline{OT}$. Este problema ya se ha resuelto.

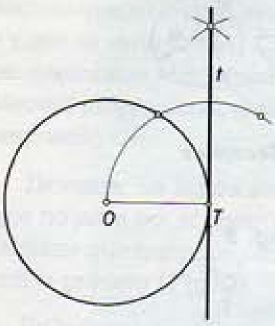

Fig. 16

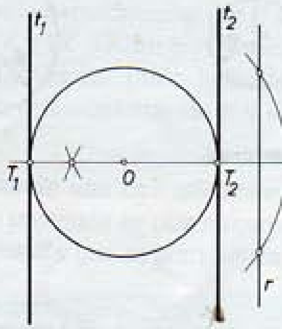

Fig. 17

6. Rectas tangentes a una circunferencia paralelas a una dirección dada (Fig. 17)

Sea la dirección r. Por el centro O se traza la perpendicular a la dirección r, la cual corta a la circunferencia en los puntos T_1 y T_2 de tangencia; por estos puntos se trazan las tangentes t_1 y t_2 paralelas a r.

7. Trazado de la tangente a un arco de circunferencia en un punto *T* de ella, no conociendo el centro del arco (Fig. 18)

Se toman dos arcos iguales $\widehat{TB}$ y $\widehat{BC}$; con centro en T y radio $\overline{TC}$ se traza un arco y con centro en B y radio BC se traza otro arco; estos dos arcos se cortan en el punto A; la recta $\overline{AT}$ es la tangente buscada.

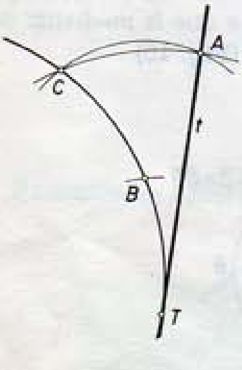

Fig. 18

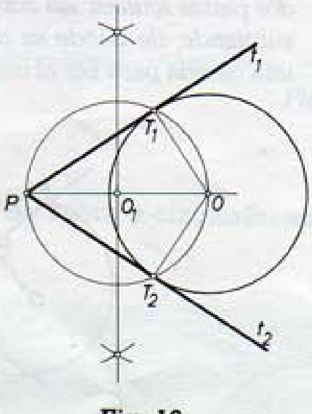

Fig. 19

8. Rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior *P* (Fig. 19)

Se une el punto exterior P con el centro O y se traza la circunferencia de diámetro $\overline{O\text{-}P}$, la cual corta en T_1 y T_2 a la dada. Las tangentes t_1 y t_2 son las rectas PT_1 y PT_2.

9. Rectas tangentes comunes exteriores a dos circunferencias (Fig. 20)

Las circunferencias dadas de centros O y O_1 tienen de radios r y R respectivamente. Con centros en O_1 se traza la de radio $\overline{R\text{-}r}$, y desde O se trazan las tangentes a ella. Rectas OT_0 y OT'_0; las rectas tangentes soluciones son paralelas a ellas; los puntos de tangencia T'_1, T_1, T_2 y T'_2 se obtienen trazando por O y O_1 las perpendiculares a las tangentes auxiliares.

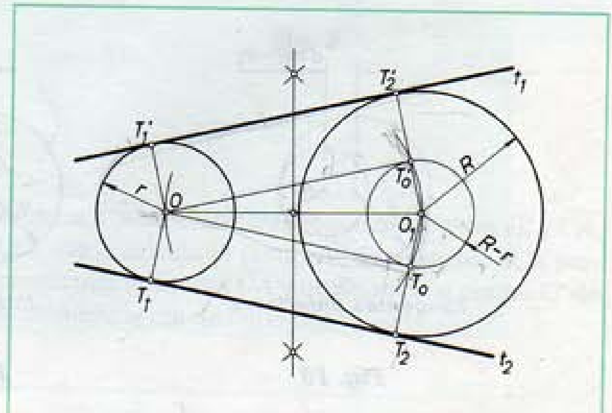

Fig. 20

10. Rectas tangentes comunes interiores a dos circunferencias (Fig. 21)

Este problema se resuelve de forma similar al anterior. Con centro en O se traza la circunferencia auxiliar de radio $\overline{R+r}$ y desde O_1 se trazan las tangentes a esta circunferencia; los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ permiten obtener los puntos T_1 y T_2; las soluciones son paralelas a $\overline{O_1A}$ y $\overline{O_1B}$.

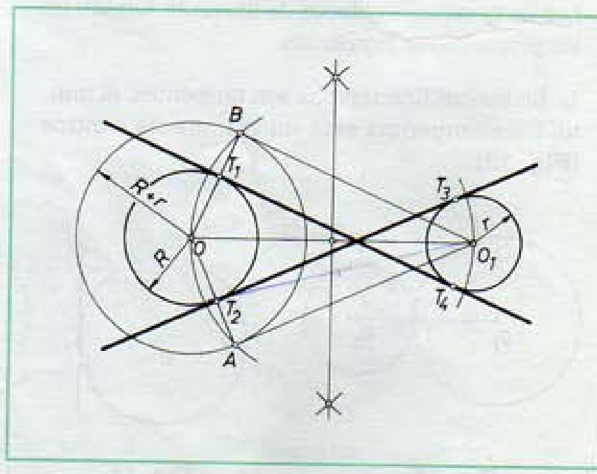

Fig. 21

11. Circunferencias tangentes a una recta *r* en un punto de ella *T*, conocido el radio *R* de las soluciones (Fig. 22)

Tiene dos soluciones. Sobre la perpendicular a la recta *r* por *T*, se toma el radio *R* en los dos sentidos, teniendo así los puntos O_1 y O_2, centros de las soluciones.

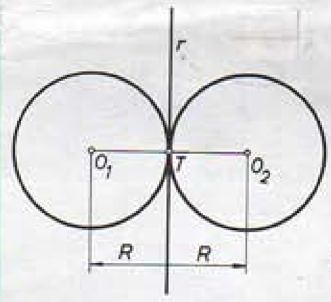

Fig. 22

12. Circunferencia tangente a una recta *r* en un punto *T* de ella y que pasa por un punto *P* (Fig. 23)

El centro *O* estará en la perpendicular a la recta *r* por *T* y en la mediatriz del segmento $\overline{TP}$.

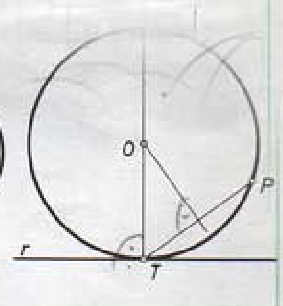

Fig. 23

13. Circunferencias tangentes a una recta *r*, que pasan por un punto *P* y que tienen un radio *R* dado (Fig. 24)

El problema tiene dos soluciones. Los centros de las soluciones han de equidistar de la recta *r* y del punto *P*; por ello, se traza la paralela a la recta *r* a la distancia *R* y a la circunferencia de centro *P* y radio *R*; los puntos de intersección de ambas, O_1 y O_2 son los centros de las soluciones, cuyos puntos de tangencia con *r* son T_1 y T_2.

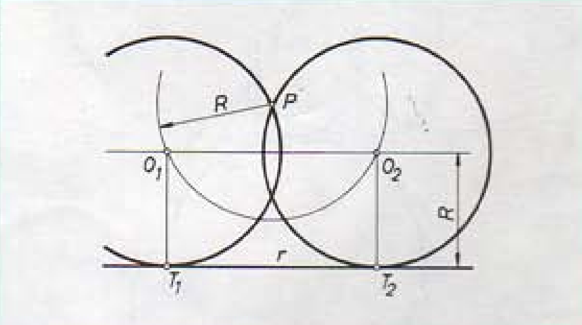

Fig. 24

14. Circunferencias tangentes a dos rectas *r* y *s* que se cortan, conocido el radio *R* de las soluciones (Fig. 25)

Se trazan rectas paralelas a las dadas a una distancia igual al radio *R*, las cuales se cortan en los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4, centros de las soluciones. En la figura se indican todos los puntos de tangencia con las rectas dadas.

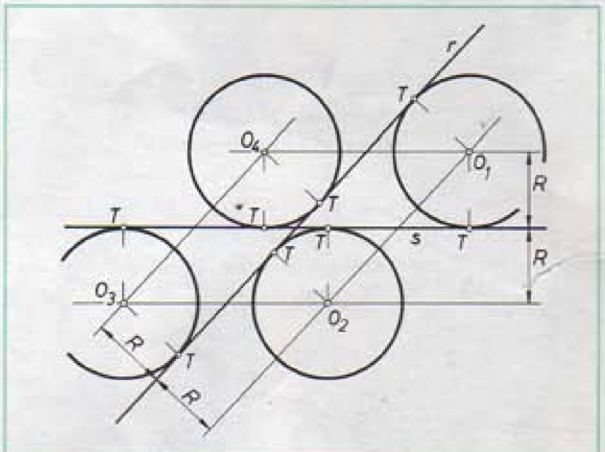

Fig. 25

15. Circunferencias tangentes a dos rectas *r* y *s*, dado el punto de tangencia *T* en una de ellas (Fig. 26)

El problema tiene dos soluciones. Los centros *O* y O_1 son los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos que forman *r* y *s* con la perpendicular a la recta *s* en el punto *T*.

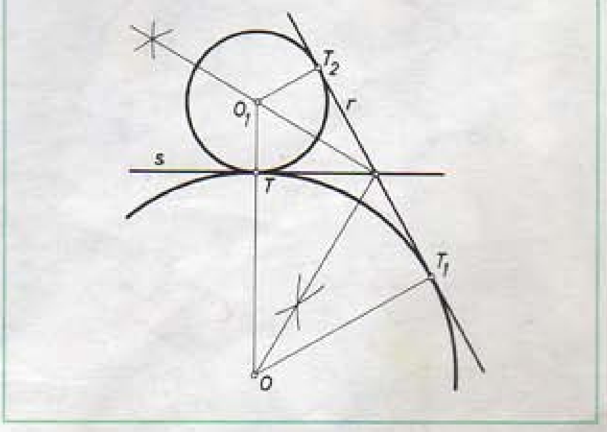

Fig. 26

Los centros de las soluciones son los puntos de intersección de la paralela y de las dos circunferencias auxiliares trazadas, puntos O_1, O_2, O_3 y O_4.

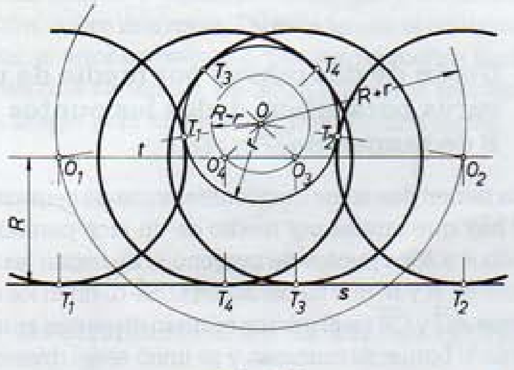

Fig. 32

22. Circunferencias tangentes a otra y a una recta *r*, dado el punto de tangencia *T* en la circunferencia (Fig. 33)

El problema tiene dos soluciones. Se da la circunferencia de centro O y la recta r, así como el punto de tangencia T en la primera. Los centros de las soluciones estarán en la recta OT; la tangente en T a la circunferencia dada, también lo será a las soluciones, por lo tanto, los centros estarán también en las bisectrices de los ángulos que forman las rectas r y t.

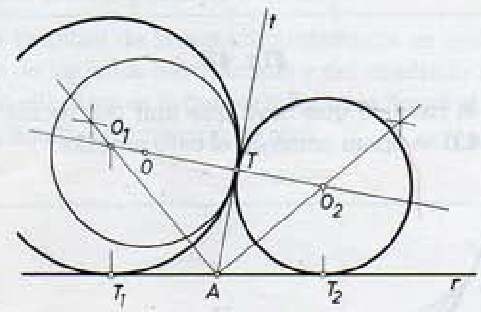

Fig. 33

23. Enlace de líneas

La aplicación real de las tangencias en el dibujo industrial es el enlace de líneas. Virtualmente en todos los planos hay que unir repetidamente dos rectas con un arco de circunferencia (excepcionalmente con un arco parabólico) o bien una recta y una circunferencia por medio de otro arco. Por ello, se indican a continuación algunos ejemplos de aplicación.

Vamos a unir dos rectas por medio de un arco de circunferencia.

En la **Fig. 34** se conoce el punto de tangencia T en r. El centro del arco está en la bisectriz de r y s y en la perpendicular por T a r.

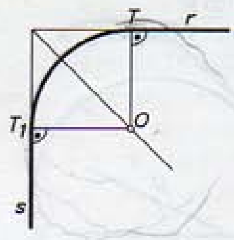

Fig. 34

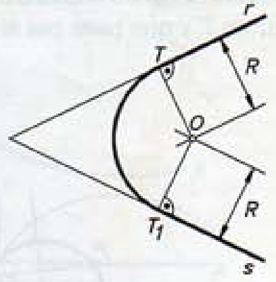

Fig. 35

En la **Fig. 35** se conoce el radio R del arco de unión de r y s. El centro es el punto O de intersección de las paralelas a r y s trazadas a la distancia R.

En la **Fig. 36** se conoce el punto T de tangencia. El centro O es el de intersección de la bisectriz de r y s con la perpendicular por T a r.

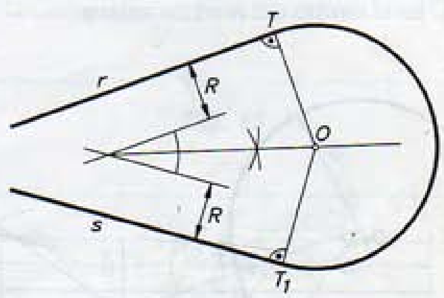

Fig. 36

En las **Figs. 37 y 38** se enlazan una recta y un arco de circunferencia de radio R_1 por medio de un arco de radio R.

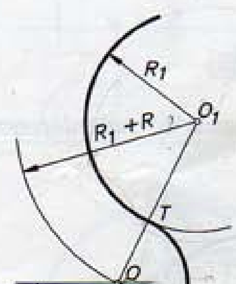

Fig. 37

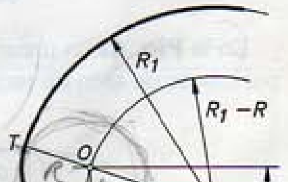

Fig. 38

Se trazan la paralela a r a la distancia R y las circunferencias de radio R_1+R o R_1-R, que se cortan en los centros O de los arcos de enlace. Se indican los puntos T de tangencia.

Circunferencias tangentes a tres rectas que se cortan dos a dos (Fig. 27)

El problema tiene cuatro soluciones. Las circunferencias pedidas son la inscrita y las exinscritas al triángulo que forman las tres rectas. Sus centros son los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores y exteriores del triángulo.

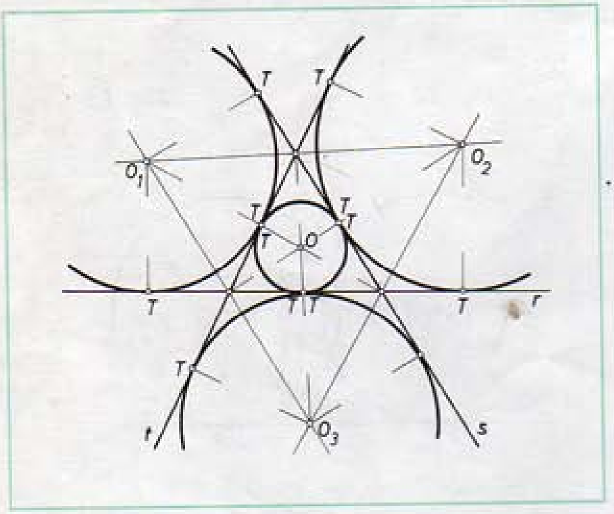

Fig. 27

17. Circunferencias tangentes a tres rectas *r*, *s* y *t* cuando al menos dos rectas se cortan fuera del dibujo (Fig. 28)

Las rectas dadas no se cortan dos a dos en los límites del dibujo; el centro *O* estará en la bisectriz del ángulo *A* y en la bisectriz de dos rectas paralelas a las *r* y *t* trazadas a la misma distancia *d* de ellas.

R

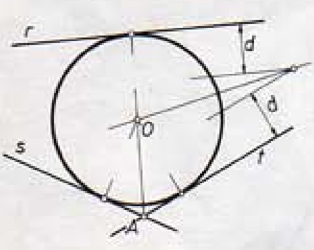

Fig. 28

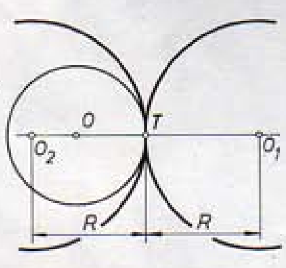

Fig. 29

18. Circunferencias tangentes a otra, dado el punto de tangencia *T* y el radio *R* de las soluciones (Fig. 29)

El problema tiene dos soluciones. Los datos son la circunferencia de centro *O*, el punto *T* y el radio *R* de las soluciones. Sobre la recta *OT* prolongada, se toma $\overline{TO_1} = \overline{TO_2} = R$. Los centros son O_1 y O_2.

19. Circunferencia tangente a otra, dado el punto de tangencia *T* y que pasa por un punto exterior *P*. (Fig. 30)

El centro O_1 de la solución es la intersección de la recta *OT*, prolongada, y de la mediatriz del segmento *TP*.

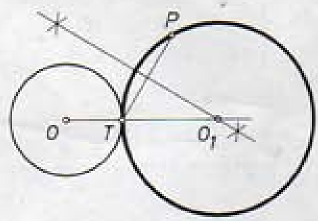

Fig. 30

20. Circunferencias tangentes a otra, que pasen por un punto *P*, dado el radio *R* de las soluciones (Fig. 31)

Según los datos, el problema puede tener hasta cuatro soluciones. Con centro en *O*, centro de la circunferencia dada, se trazan las circunferencias de radio $\overline{R+r}$ y $\overline{R-r}$, y con centro en *P*, otra circunferencia de radio *R*. Los puntos de intersección de estas circunferencias O_1, O_2, O_3 y O_4 son los centros de las soluciones.

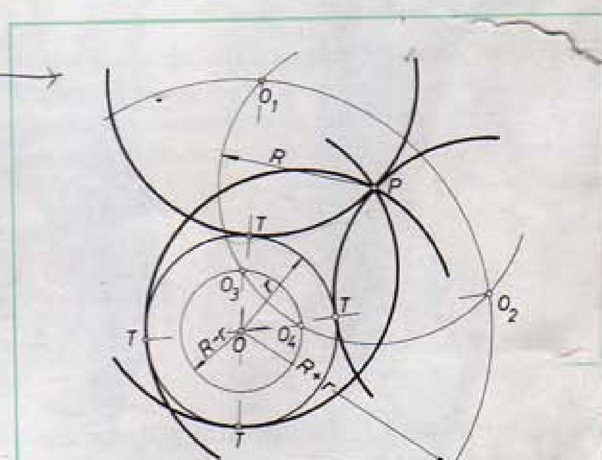

Fig. 31

21. Circunferencias tangentes a otra y a una recta *s*, dado el radio *R* de las soluciones (Fig. 32)

El problema puede tener cuatro soluciones. La ci cunferencia dato es la de centro *O* y radio *r*. Se tra la recta *t* paralela a la *s*, a la distancia *R* y con cen en *O*, las circunferencias de radio $\overline{R+r}$ y $\overline{R-r}$.

En la **Fig. 39** se traza un arco tangente a otro en un punto T y que pasa por el punto P.

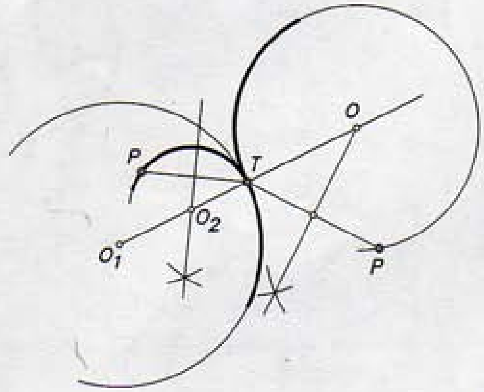

Fig. 39

En la **Fig. 40** se enlaza un arco de radio R con una recta r sabiendo que el punto T es de tangencia. Se traza por T la perpendicular a r y se toma $TN = R$. La mediatriz de $\overline{O_1 - N}$ corta en O a la perpendicular. El punto O es el centro del arco de enlace.

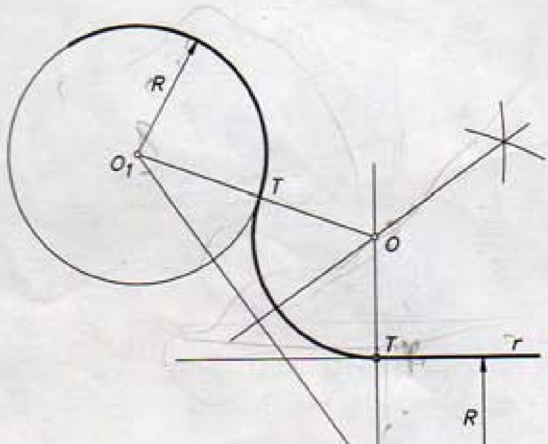

Fig. 40

En la **Fig. 41** se unen dos arcos de circunferencia por medio de arco de radio R.

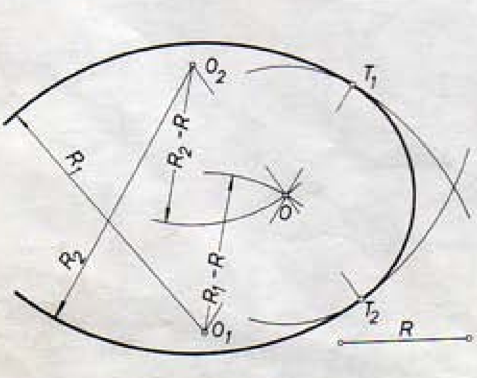

Fig. 41

Con centros en O_1 y O_2 se trazan dos arcos de radio $\overline{R_1\text{-}R}$ y $\overline{R_2\text{-}R}$, los cuales se cortan en el centro O del arco solución. Uniendo O con O_1 y O_2 se obtienen los puntos de otro tangencia T_1 y T_2.

24. Unión de dos curvas por medio de una curva parabólica, dados los puntos *A* y *B* de tangencia (Fig. 42)

Se tienen dos arcos de circunferencia de centros O y O' y hay que unirles por medio de un arco parabólico, siendo A y B los puntos de tangencia. Se trazan las tangentes en A y B, que se cortan en C. Se dividen los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ en el mismo número de partes iguales, seis en la figura; se numeran y se unen estas divisiones de la forma que indica la figura; las rectas $\overline{1\text{-}A}$ y $\overline{1\text{-}B}$ se cortan en el punto P_1 del arco parabólico; de la misma forma se obtienen otros puntos del citado arco.

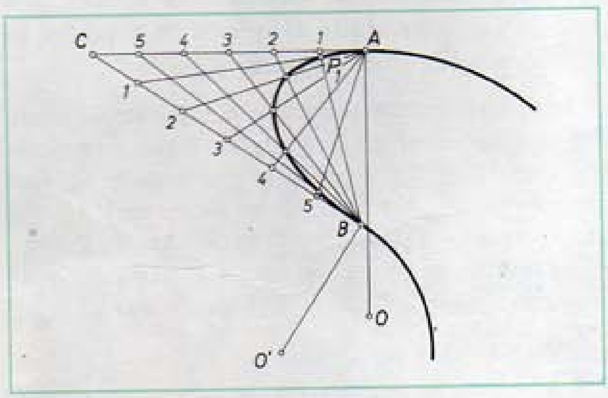

Fig. 42

En el caso de que haya que unir dos rectas r y s **(Fig. 43)** se opera como en el caso anterior.

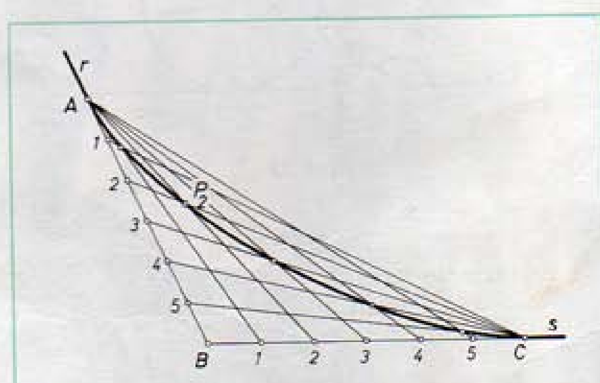

Fig. 43

25. Rectificaciones

En la práctica se presenta el caso de tener que rectificar una curva cualquiera o un arco de circunferencia. A continuación se indica la forma de resolver este tipo de problemas.

Roberto

26. Rectificación de una curva cualquiera (Fig. 44)

Sobre la curva dada se toman cuerdas lo más pequeñas posible y se van llevando, una a continuación de otra, sobre una recta. De esta forma, al no tomar los arcos, el error es pequeño, por ser pequeñas las divisiones que se toman. La física enseña el manejo del curvímetro para medir la longitud de una curva.

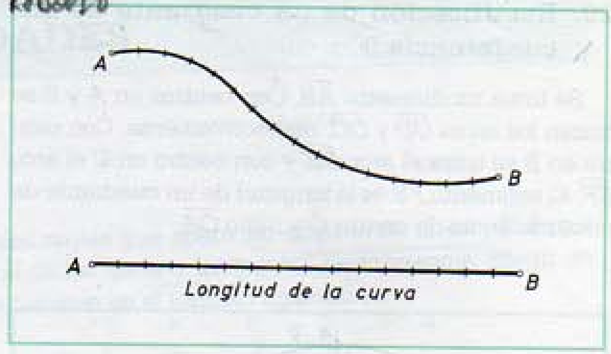

Fig. 44

27. Rectificación de la circunferencia (Fig. 45)

Se divide el diámetro en siete partes iguales y sobre una recta se llevan 22 de dichas partes, es decir, tres diámetros y una séptima parte del diámetro.

La longitud de la circunferencia es $2\pi r = \pi d$; el número π es aproximadamente igual a $22/7 = 3\frac{1}{7}$, de aquí, el tomar tres diámetros más una séptima parte del diámetro.

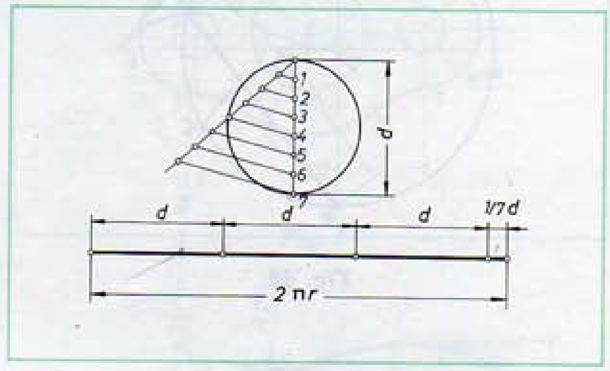

Fig. 45

28. Rectificación de la semicircunferencia

Primer procedimiento (Fig. 46)

La longitud de la semicircunferencia es igual a la suma de los lados del triángulo y del cuadrado inscritos en ella. Esto es lo que se hace en la figura al poner l_3 y l_4 uno a continuación de otro.

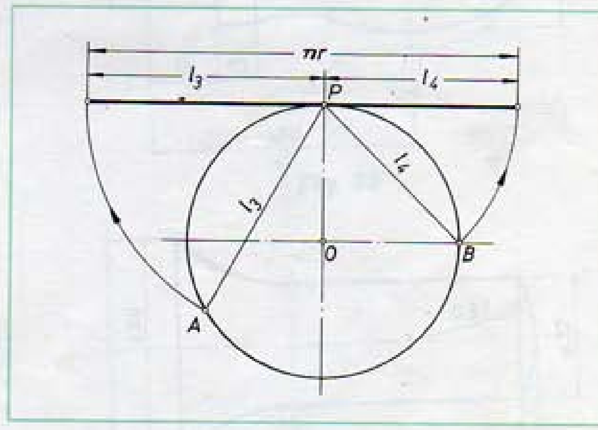

Fig. 46

Segundo procedimiento (Fig. 47) no

Por el centro O se traza la recta OA que forma 30° con el diámetro $\overline{BD}$; esta recta encuentra en A a la tangente en B a la circunferencia. Se toma $\overline{AC} = 3r$ (tres radios y se unen C y D. El segmento $\overline{CD}$ es la rectificación de la semicircunferencia.

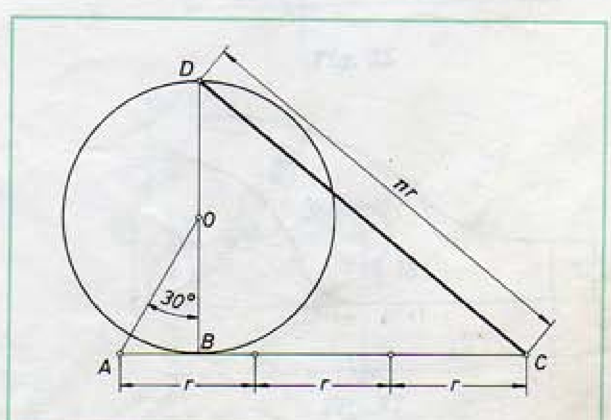

Fig. 47

29. Rectificación de un cuadrante de circunferencia (Fig. 48)

Se toma un diámetro $\overline{AB}$. Con centros en A y B se trazan los arcos $\widehat{OD}$ y $\widehat{OC}$, respectivamente. Con centro en B se traza el arco $\widehat{DE}$ y con centro en C el arco $\widehat{EF}$. El segmento $\overline{FB}$ es la longitud de un cuadrante de circunferencia de centro O y radio $\overline{OA}$.

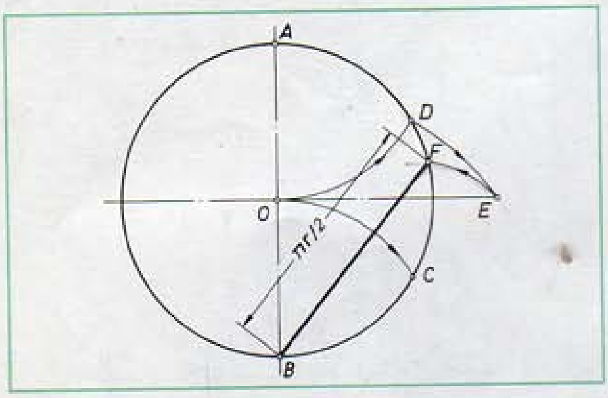

Fig. 48

30. Rectificación de un arco de circunferencia menor de 90° (Fig. 49)

Se divide el radio $\overline{OE}$ en cuatro partes iguales y se toma $\overline{ED}$ igual a tres de dichas partes. Si el arco a rectificar es $\widehat{AB}$, se traza la tangente en A y se unen los puntos D y B. El segmento $\overline{AC}$ es la longitud del arco $\widehat{AB}$. El problema inverso puede resolverse también por este método.

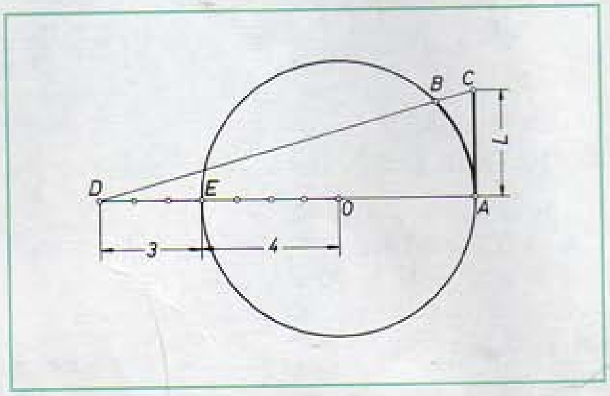

Fig. 49