DIBUJO GEOMÉTRICO

CURVAS TECNICAS (II)

Curvas cónicas: La hipérbola

TEMA 9

1. La hipérbola: Definición, elementos y propiedades más importantes (Fig. 1)

La hipérbola es una curva plana, abierta, con dos ramas; se define como el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos fijos es constante e igual a ***2a***, siendo ***2a*** = $\overline{AB}$, la longitud del eje real. Los puntos fijos son los focos ***F*** y ***F'***.

Tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en el punto medio *O*, centro de la curva. El eje mayor $\overline{AB}$ se llama eje real y se representa por ***2a***; el eje menor $\overline{CD}$ se representa por ***2b*** y se llama imaginario porque no tiene puntos comunes con la curva. Los focos están en el eje real. La distancia focal $\overline{F\text{-}F'}$ se representa por ***2c***.

Entre ***a, b*** y ***c*** existe la relación $c^2 = a^2 + b^2$.

La hipérbola es simétrica respecto de los dos ejes y, por lo tanto, respecto del centro *O*. Las rectas que unen un punto ***M*** de la curva con dos focos, se llaman **radios vectores** ***r*** y ***r'*** y por la definición se verifica: $r - r' = 2a$.

La circunferencia principal de la hipérbola es la que tiene por centro *O* y radio **a**. Se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a cada una de las tangentes. **Las circunferencias focales** tienen por centros los focos y radio ***2a***.

La hipérbola, como la elipse, se puede definir como el lugar geométrico de los centros de circunferencias que pasan por un foco y son tangentes a la circunferencia focal del otro foco.

Las asíntotas de la hipérbola son las tangentes a la curva en los puntos del infinito. Estas asíntotas son simétricas respecto de los ejes y pasan por el centro de la curva.

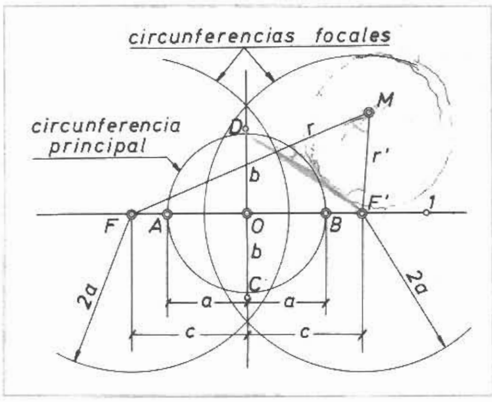

Fig. 1

2. Construcción de la hipérbola por puntos a partir de los ejes (Fig. 2)

Los datos son $2a = \overline{AB}$ y $2c = \overline{FF'}$. Se toma un punto *N* en el eje real $\overline{AB}$ y con radios $\overline{AN}$ y $\overline{BN}$ y centros en *F* y *F'* se trazan dos arcos que se cortan en *M*, punto de la hipérbola; de esta forma, $\overline{MF} - \overline{MF'} = 2a = \overline{AB}$. En la figura se obtienen otros puntos de la curva tomando los puntos *1*, *2* y *3* del eje real.

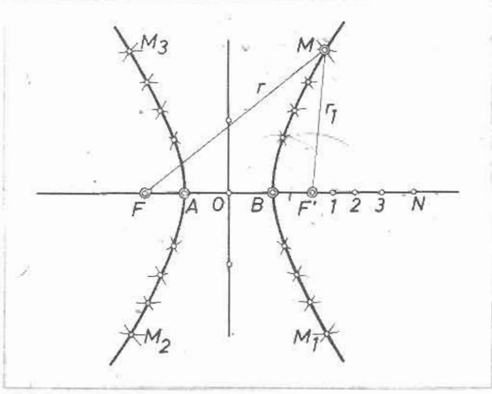

Fig. 2

3. Construcción de la hipérbola por haces proyectivos (Fig. 3)

Se conocen $2a = \overline{AB}$ y $2c = \overline{FF'}$; se halla un punto cualquiera *P* de la curva y se construye el rectángulo *AMPN*; se dividen los lados $\overline{MP}$ y $\overline{PN}$ en un número cualquiera de partes iguales que se unen con los puntos *A* y *F'*, respectivamente. Los puntos de intersección de los rayos homónimos u homólogos de estos dos haces son puntos de la hipérbola. Así, $\overline{F'\text{-}4}$ y $\overline{A\text{-}4}$ se cortan en el punto *T* de la curva; de la misma forma se construye la parte inferior de la curva.

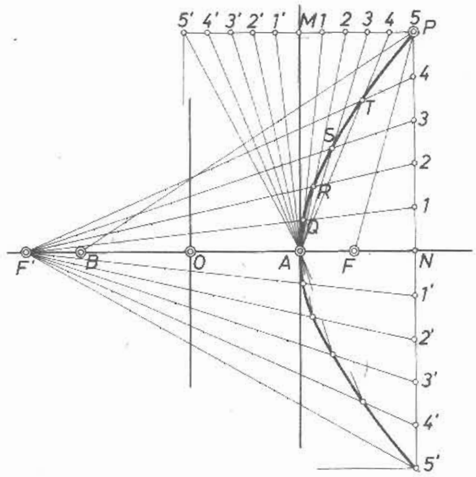

Fig. 3

4. Trazado de la hipérbola por envolventes (Fig. 4)

Se conocen los vértices *A* y *B* y los focos *F* y *F'*; se construye la circunferencia principal de centro *O* y radio $a = \overline{OA} = \overline{OB}$. Al igual que en la elipse, basta tomar puntos en la circunferencia principal, unirles con *F* y trazar las correspondientes perpendiculares, que son tangentes a la curva. En la figura sólo está trazada una rama.

Las asíntotas *a* y a_1 de la hipérbola son tangentes a ella en el infinito. Son simétricas respecto de los ejes, pasan por el centro *O* y por el vértice ***R*** y su simétrico *S* del triángulo cuyos catetos son ***a*** y ***b*** y la hipotenusa *c*.

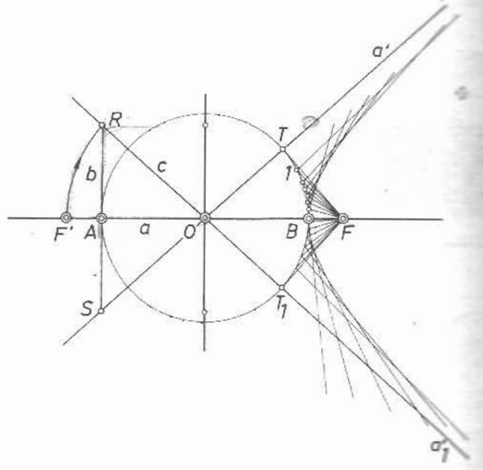

Fig. 4

5. Trazado de la tangente y normal a la hipérbola en un punto *P* de ella (Fig. 5)

La tangente a la hipérbola en un punto *P* es la recta *t*, bisectriz de los radios vectores *r* y r_1. La normal a la curva en el punto *P* es la recta *n*, perpendicular a la tangente *t*.

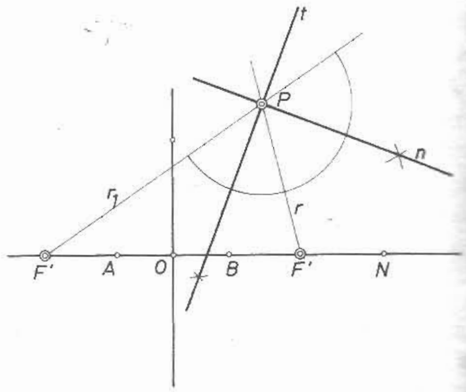

Fig. 5

6. Tangentes a la hipérbola desde un punto exterior (Fig. 6)

Se traza la circunferencia focal de centro *F* y la circunferencia de centro el punto *P*, dado, y que pasa por el otro foco *F'*; estas dos circunferencias se cortan los puntos N y M que, unidos con F', nos dan los segmentos $\overline{NF'}$ y $\overline{MF'}$; las mediatrices de estos segmentos pasan por P y son las tangentes a la hipérbola. Los puntos de tangencia T_1 y T_2 se obtienen uniendo F con N y M hasta que corten a las tangentes.

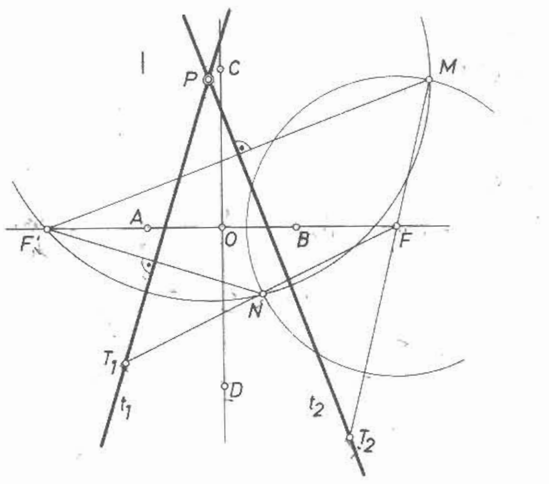

Fig. 6

7. Tangentes a la hipérbola paralelas a una dirección dada *r* (Fig. 7)

Como en la elipse, se traza por un foco F' la perpendicular a la dirección r, la cual corta a la circunferencia focal del foco F en los puntos N y M. Las tangentes t y t' son las mediatrices de los segmentos $\overline{F'N}$ y $\overline{F'M}$. En la figura se trazan también las asíntotas, que son las mediatrices de los segmentos $\overline{F'Q}$ y $\overline{F'R}$.

2 formas de obtener las asíntotas

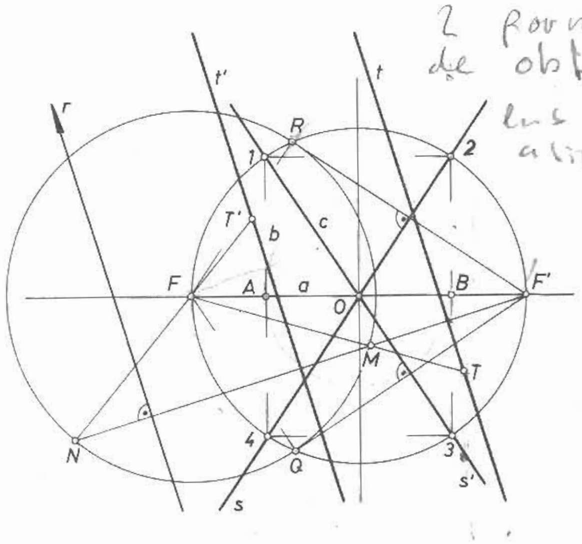

Fig. 7

8. Trazado de las asíntotas de la hipérbola a partir de la circunferencia principal (Fig. 8)

Las asíntotas pasan por el centro O de la curva, por lo tanto, se trata de trazar las tangentes a la hipérbola desde el punto O. La circunferencia principal, de centro O y radio $a = \overline{OA}$, corta a la de diámetro $\overline{OF'}$ en los puntos N y N_1. Las rectas ON y ON_1 son las asíntotas. También se obtienen uniendo el punto O con los puntos 1 y 2 donde corta a la circunferencia de diámetro $\overline{FF'}$ (radio = c) la perpendicular por B al eje real. El triángulo 1-B-O es rectángulo y sus lados son a, b y c.

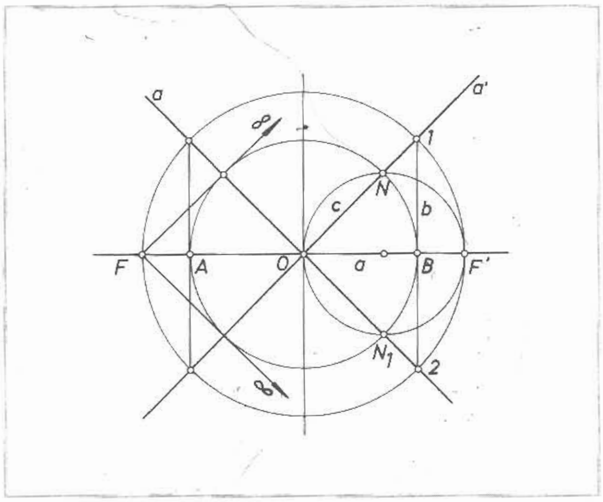

Fig. 8

9. Puntos de intersección de una recta con una hipérbola (Fig. 9)

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos que son centros de circunferencias tangentes a una circunferencia focal y que pasan por el otro foco que no es centro de la focal. Es decir, los puntos de intersección de la recta r y de la hipérbola son los centros de las circunferencias tangentes a la focal de F y que pasan por los puntos F' y F_1, simétrico de F' respecto de la recta r. En la figura se resuelve este problema de tangencias ya estudiado.

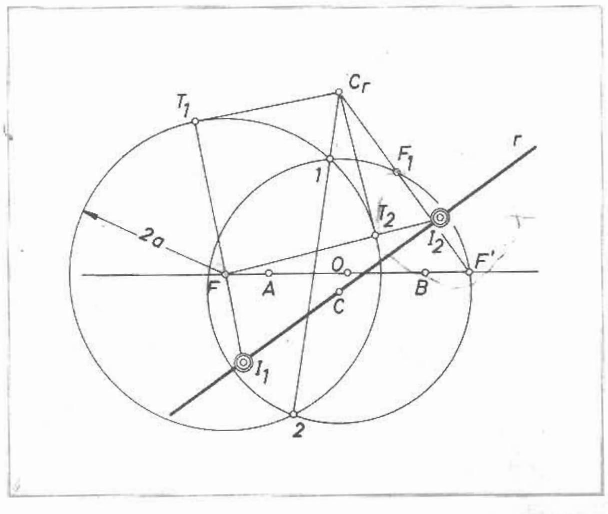

Fig. 9

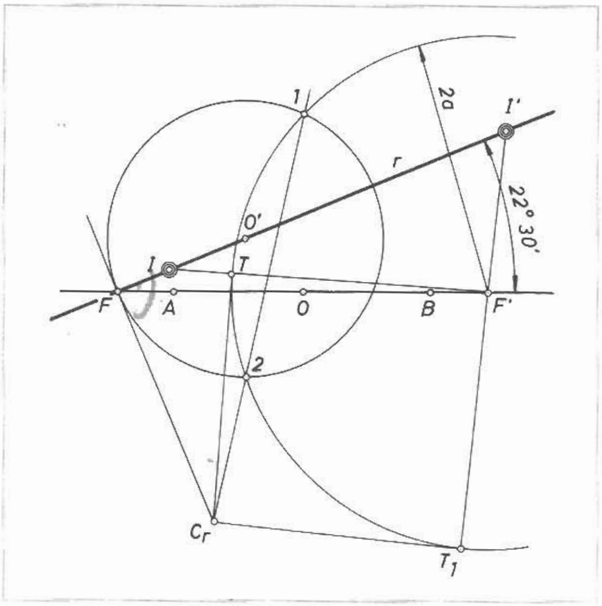

Fig. 10

10. Problema (Fig. 10)

Una hipérbola está determinada por la distancia focal $2c = 50$ *mm.* y su eje real $2a = 35$ *mm.* Determ... los puntos de intersección con una recta que pase por un foco y forma un ángulo de *22°30'* con el eje real.

Solución: Como la recta pasa por un foco, el simétrico de él respecto de la recta es él mismo, reduciéndose el problema a buscar los puntos en la recta que son centros de circunferencias tangentes a la focal F', que pasan por *F* y son tangentes a la recta perpendicular a la dada por *F*. Este problema se resuelve en la figura como un problema de tangencias.

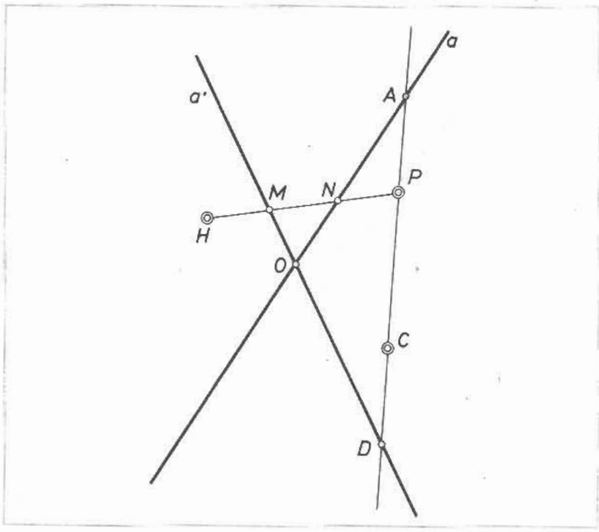

Fig. 11

11. Obtención de puntos de una hipérbola definida por las asíntotas y un punto de ella.

Primer procedimiento (Fig. 11)

Se traza por *P* una recta cualquiera que corta a las asíntotas en los *A* y *D*; tomando $\overline{DC} = \overline{PA}$ se obtiene otro punto *C* de la curva. De la misma forma, otra recta que pase por *P* corta en *N* y *M* a las asíntotas; se toma $\overline{MH} = \overline{NP}$ y se tiene otro punto *H* de la curva.

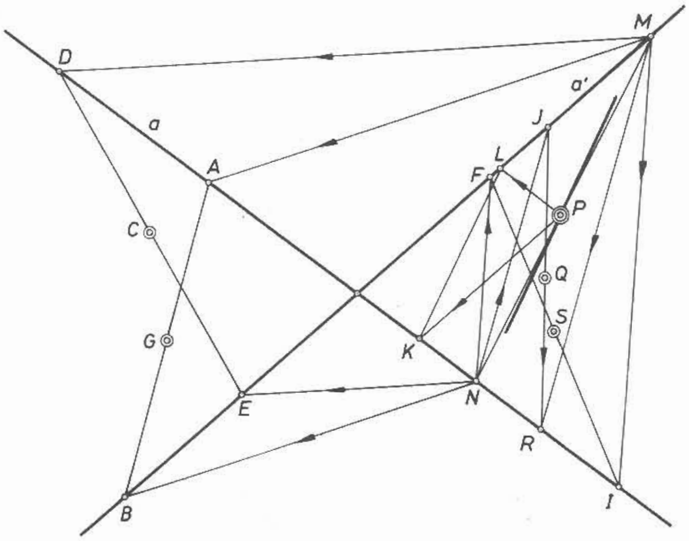

Fig. 12

Segundo procedimiento (Fig. 12)

Por el punto *P* se traza una recta cualquiera *MN*; se trazan *MD* y *NE* paralelas a una dirección cualquiera, y el punto medio *C* del segmento $\overline{DE}$ es de la curva. De la misma forma, *MA* y *NB*, paralelas, y el punto medio *G* del segmento $\overline{AB}$ es de la curva; *NF* y *MI*, paralelas, y el punto medio *S* de $\overline{FI}$ es de la curva; lo mismo ocurre con el punto *Q*. Trazando por *P* las paralelas *PK* a las asíntotas, se tiene la recta *LK* y la tangente a la hipérbola en *P* es paralela a *LK*.